Préparation Brevet

Calculs – Fonctions – Grandeurs – Géométrie – Statistiques – Probabilités – Algorithmique

Première partie – Exercices

1 Calculs, équations et programmes de calcul

Exercice 1 – Fractions, puissances et écriture scientifique

Calculer chaque expression et donner le résultat sous forme simplifiée.

$$A = \frac{7}{12} - \frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{2}{9}$$

$$B = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right) \div \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{4}\right)$$

$$C = \frac{3^4 \times 9^{-1} \times 27}{3^{-2}}$$

$$D = \frac{4{,}8 \times 10^7 \times 2{,}5 \times 10^{-3}}{6 \times 10^2}$$

1. Calculer A, B, C et D.
2. Ranger A, B et C dans l'ordre croissant.
3. Donner D en écriture scientifique.

Exercice 2 – Programme de calcul type Brevet

On considère le programme suivant.

Choisir un nombre x

Ajouter 4

Multiplier le résultat par $2x - 3$

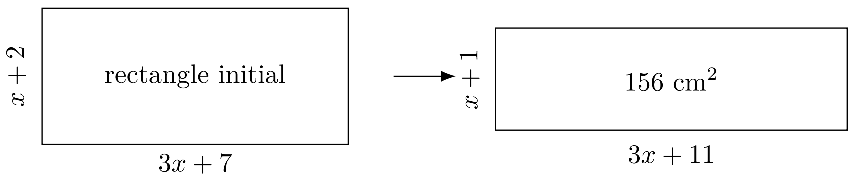
Soustraire $2x^2$

Ajouter 15

1. Tester le programme avec $x = 3$, puis avec $x = -2$.
2. Montrer que le résultat final est une fonction affine de x.
3. Déterminer le nombre de départ qui donne 0.
4. Pour quels nombres de départ le résultat est-il supérieur ou égal à 25 ?

Exercice 3 – Rectangle, équation et interprétation

Un rectangle a pour longueur $3x + 7$ et pour largeur $x + 2$, avec $x > 0$. On augmente sa longueur de 4 cm et on diminue sa largeur de 1 cm. Le nouveau rectangle a une aire de 156 cm^2.

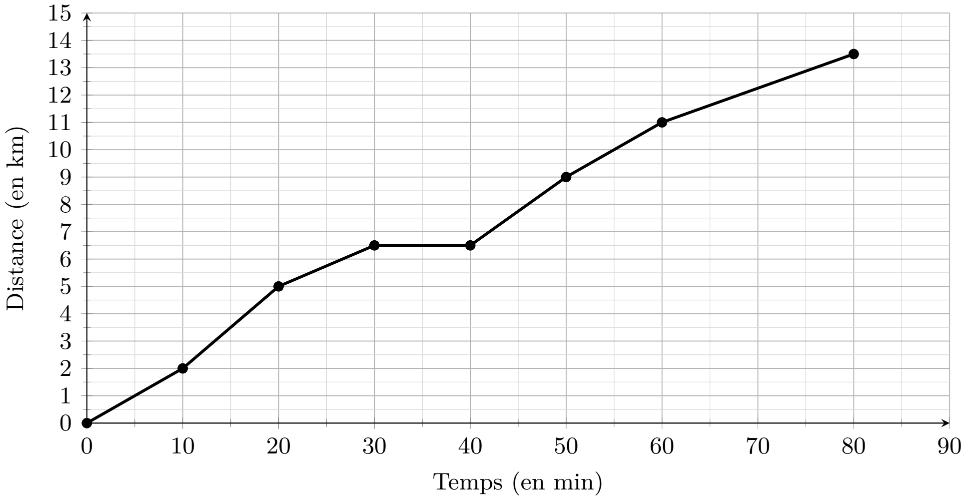


1. Exprimer les dimensions du nouveau rectangle.
2. Montrer que l'équation à résoudre est $(3x + 11)(x + 1) = 156$.
3. Développer puis réduire cette équation.
4. Vérifier que $x = 5$ est solution.
5. Donner les dimensions du rectangle initial et du nouveau rectangle.

2 Fonctions, graphiques et grandeurs composées

Exercice 4 – Lecture graphique : course avec arrêt

Le graphique représente la distance parcourue par une élève pendant un entraînement.



1. La distance est-elle proportionnelle au temps ? Justifier.
2. Quelle distance est parcourue au bout de 20 minutes ?
3. Pendant combien de minutes l'élève s'est-elle arrêtée ?
4. Calculer la vitesse moyenne sur tout le parcours, en km/h.
5. Entre 40 et 50 minutes, calculer la vitesse moyenne sur cette portion.

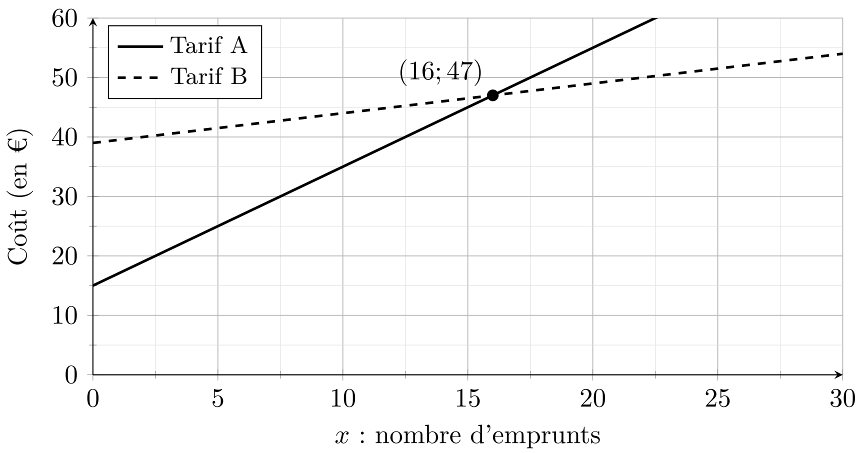
Exercice 5 – Deux forfaits et point d'équilibre

Une médiathèque propose deux tarifs.

— Tarif A : 15 € d'inscription puis 2 € par emprunt.

— Tarif B : 39 € d'inscription puis 0,50 € par emprunt.

On note x le nombre d'emprunts dans l'année.



1. Écrire les fonctions $A(x)$ et $B(x)$.
2. Calculer les deux coûts pour 10 emprunts, puis pour 20 emprunts.
3. Retrouver par le calcul le point d'intersection du graphique.
4. À partir de combien d'emprunts le tarif B devient-il plus avantageux ?

Exercice 6 – Pourcentages successifs et comparaison

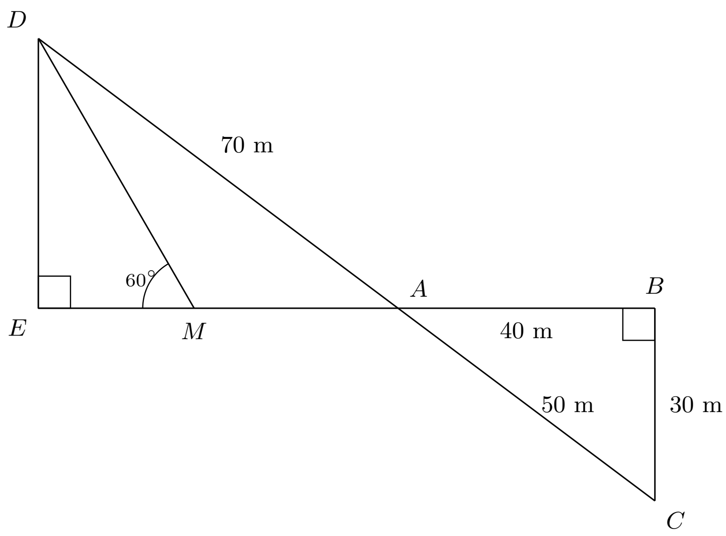
Un vélo coûte 420 € en janvier. En février, son prix augmente de 12%. En mars, le nouveau prix baisse de 15%.

1. Calculer le prix après l'augmentation.
2. Calculer le prix final après la baisse.
3. Le prix final est-il inférieur ou supérieur au prix initial ? De quel pourcentage ?
4. Un autre magasin baisse directement le prix initial de 5%. Quel magasin est le plus avantageux ?

3 Géométrie plane, Thalès, trigonométrie

Exercice 7 – Figure de synthèse : parallélisme et trigonométrie

La figure n'est pas en vraie grandeur. Les points E, M, A et B sont alignés. Les points D, A et C sont alignés. Les triangles ADE et ABC sont rectangles respectivement en E et en B.

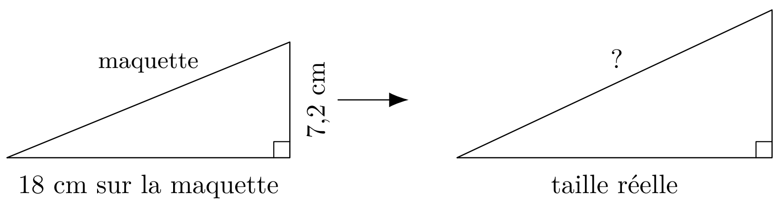


On donne $AD = 70$ m, $AC = 50$ m et $BC = 30$ m.

1. Calculer AB.
2. Montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
3. Montrer que $DE = 42$ m.
4. En utilisant la trigonométrie dans le triangle DME, montrer que $EM \approx 24{,}2$ m.
5. En déduire l'aire du triangle AMD.

Exercice 8 – Homothétie, aires et volumes

Une maquette d'une rampe de skate est réalisée à l'échelle 1 : 25.

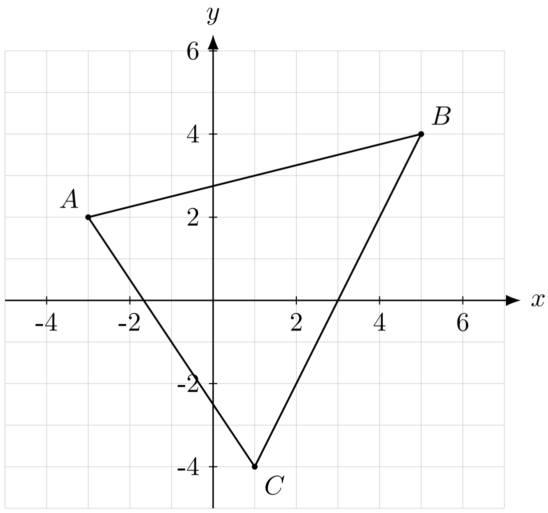


1. Calculer la longueur réelle correspondant à 18 cm sur la maquette.
2. Calculer la hauteur réelle correspondant à 7,2 cm.
3. L'aire de la face triangulaire de la maquette est 64,8 cm^2. Calculer l'aire réelle correspondante en m^2.
4. Le volume de la maquette est 1 944 cm^3. Calculer le volume réel en m^3.

Exercice 9 – Coordonnées et nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, on considère les points

$$A(-3;2), \qquad B(5;4), \qquad C(1;-4).$$



1. Calculer AB^2, AC^2 et BC^2.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
4. Le point $D(9;-2)$ forme-t-il un parallélogramme $ABDC$? Justifier.

4 Statistiques, probabilités et algorithmique

Exercice 10 – Statistiques et décision

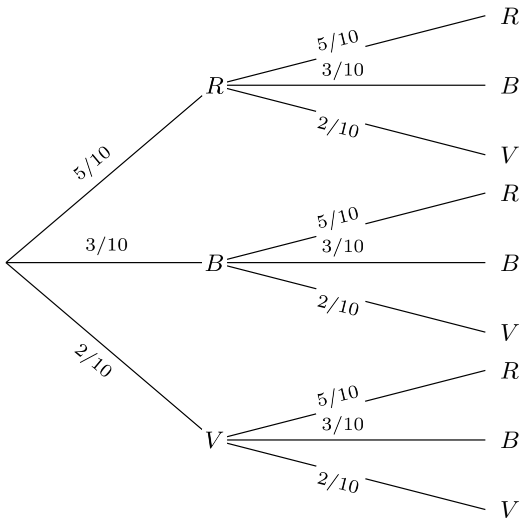
Dans deux classes de 3e, on a relevé les notes obtenues à un devoir commun.

Note	6	8	10	12	15	18
Effectif 3e A	2	4	6	8	5	3
Effectif 3e B	1	5	7	5	6	4

1. Calculer la moyenne de chaque classe.
2. Déterminer la médiane de chaque classe.
3. Calculer l'étendue de chaque série.
4. Un professeur affirme : « La classe B est meilleure car elle a plus de notes supérieures ou égales à 15. » Cette conclusion est-elle suffisante ? Répondre avec des arguments statistiques.

Exercice 11 – Probabilités avec arbre pondéré

Dans une boîte, il y a 5 jetons rouges, 3 jetons bleus et 2 jetons verts. On tire un jeton, on note sa couleur, puis on le remet dans la boîte et on tire un deuxième jeton.



1. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons rouges.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un jeton rouge.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux couleurs différentes.
4. On répète l'expérience 200 fois. Peut-on prévoir exactement le nombre de fois où l'on obtiendra deux rouges ? Expliquer.

Exercice 12 – Tableur et formule

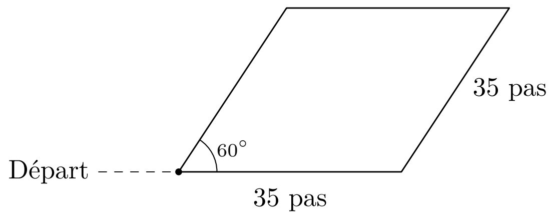
On veut calculer les prix après une remise variable. La cellule B2 contient le prix initial et la cellule C2 contient le taux de remise.

	A	B	C
1	Article	Prix initial	Remise
2	Casque	84	15%
3	Sac	56	20%
4	Gants	32	12,5%

1. Donner une formule à saisir en D2 pour obtenir le prix après remise, puis à recopier vers le bas.
2. Calculer les trois prix après remise.
3. Le magasin ajoute ensuite 3,50 € de frais fixes sur chaque article. Donner la nouvelle formule en E2.

Exercice 13 – Algorithmique et motif géométrique

Un lutin trace un motif. Chaque segment du motif mesure 35 pas.



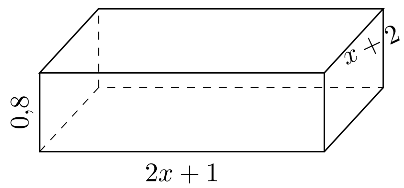
Script incomplet	**Instructions disponibles**
mettre le stylo en position d'écriture	A : tourner de 60°
répéter 2 fois	B : avancer de 35 pas
avancer de 35 pas	C : tourner de 120°
instruction 1	
avancer de 35 pas	
instruction 2	
relever le stylo	

1. Choisir l'ordre des deux instructions manquantes pour obtenir le parallélogramme.
2. Quelle est la nature exacte du quadrilatère tracé ? Justifier.
3. Si le programme choisit au hasard entre trois motifs et que seul ce motif affiche « gagné », quelle est la probabilité d'afficher « gagné » ?

5 Sujet bilan type Brevet

Exercice 14 – Problème complet : bassin, fonction et volume

On veut construire un petit bassin rectangulaire. La longueur intérieure est $2x + 1$ mètres et la largeur intérieure est $x + 2$ mètres. La profondeur est constante et égale à 0,8 m.



1. Exprimer l'aire du fond du bassin en fonction de x.
2. Montrer que le volume d'eau est $V(x) = 0{,}8(2x + 1)(x + 2)$.
3. Calculer $V(3)$.
4. On veut un volume strictement supérieur à 28 m^3. Montrer que $x = 4$ convient mais que $x = 3$ ne convient pas.
5. Le prix du revêtement du fond est 18 € par m^2. Calculer le coût du fond pour $x = 4$.

Deuxième partie – Corrections détaillées

Correction 1

$$A = \frac{42}{72} - \frac{20}{72} + \frac{33}{72} - \frac{16}{72} = \frac{39}{72} = \frac{13}{24}.$$

$$B = \left(\frac{6}{10} - \frac{7}{10}\right) \div \left(\frac{9}{20} - \frac{5}{20}\right) = \left(-\frac{1}{10}\right) \div \frac{4}{20} = -\frac{1}{10} \times \frac{5}{1} = -\frac{1}{2}.$$

$$C = \frac{3^4 \times (3^2)^{-1} \times 3^3}{3^{-2}} = \frac{3^4 \times 3^{-2} \times 3^3}{3^{-2}} = 3^{4-2+3-(-2)} = 3^7 = 2187.$$

$$D = \frac{4{,}8 \times 2{,}5}{6} \times 10^{7-3-2} = 2 \times 10^2.$$

Ordre croissant : $B < A < C$, donc $-\frac{1}{2} < \frac{13}{24} < 2187$.

Correction 2

Avec un nombre x :

$$(x+4)(2x-3) - 2x^2 + 15 = 2x^2 + 5x - 12 - 2x^2 + 15 = 5x + 3.$$

Pour $x = 3$, le résultat vaut $5 \times 3 + 3 = 18$. Pour $x = -2$, il vaut $5 \times (-2) + 3 = -7$. Le résultat est bien une fonction affine : $f(x) = 5x + 3$.

$$f(x) = 0 \iff 5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{5}.$$

$$f(x) \geq 25 \iff 5x + 3 \geq 25 \iff 5x \geq 22 \iff x \geq \frac{22}{5} = 4{,}4.$$

Correction 3

Les nouvelles dimensions sont $3x + 11$ et $x + 1$. Donc :

$$(3x + 11)(x + 1) = 156.$$

En développant :

$$3x^2 + 3x + 11x + 11 = 156 \iff 3x^2 + 14x - 145 = 0.$$

Pour $x = 5$:

$$3 \times 25 + 14 \times 5 - 145 = 75 + 70 - 145 = 0.$$

Donc $x = 5$ convient. Dimensions initiales :

$$3x + 7 = 22 \text{ cm}, \qquad x + 2 = 7 \text{ cm}.$$

Nouvelles dimensions : 26 cm et 6 cm, et $26 \times 6 = 156$ cm^2.

Correction 4

La distance n'est pas proportionnelle au temps car la courbe n'est pas une droite passant par l'origine : il y a même un arrêt entre 30 et 40 min. Au bout de 20 min, la distance est 5 km. L'arrêt dure 10 min. La vitesse moyenne sur tout le parcours est :

$$80 \text{ min} = \frac{4}{3} \text{ h}, \qquad v = \frac{13{,}5}{4/3} = 10{,}125 \text{ km/h} \approx 10{,}1 \text{ km/h}.$$

Entre 40 et 50 min, la distance passe de 6,5 km à 9 km, soit 2,5 km en 10 min :

$$10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h}, \qquad v = \frac{2{,}5}{1/6} = 15 \text{ km/h}.$$

Correction 5

$$A(x) = 15 + 2x, \qquad B(x) = 39 + 0{,}5x.$$

Pour 10 emprunts : $A(10) = 35$ et $B(10) = 44$. Pour 20 emprunts : $A(20) = 55$ et $B(20) = 49$. Intersection :

$$15 + 2x = 39 + 0{,}5x \iff 1{,}5x = 24 \iff x = 16.$$

Le coût est alors 47 €. Après 16 emprunts, le tarif B devient plus avantageux ; pour un nombre entier d'emprunts, il faut donc au moins 17 emprunts.

Correction 6

Après augmentation de 12% :

$$420 \times 1{,}12 = 470{,}40\,€.$$

Après baisse de 15% :

$$470{,}40 \times 0{,}85 = 399{,}84\,€.$$

Le prix final est inférieur au prix initial de :

$$420 - 399{,}84 = 20{,}16\,€.$$

Le pourcentage de baisse globale est :

$$\frac{20{,}16}{420} \times 100 = 4{,}8\%.$$

L'autre magasin propose une baisse de 5% :

$$420 \times 0{,}95 = 399\,€.$$

Le deuxième magasin est donc légèrement plus avantageux.

Correction 7

Dans le triangle rectangle ABC :

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 50^2 - 30^2 = 2500 - 900 = 1600,$$

Donc $AB = 40$ m. Les points D, A, C sont alignés, les points E, A, B sont alignés, et $DE \perp EB$, $BC \perp EB$. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(DE) \parallel (BC)$. Les triangles ADE et ABC sont donc semblables. Le rapport est :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{70}{50} = 1{,}4.$$

Donc :

$$DE = 1{,}4 \times BC = 1{,}4 \times 30 = 42 \text{ m}.$$

Dans le triangle rectangle DME :

$$\tan(60°) = \frac{DE}{EM} \quad \Rightarrow \quad EM = \frac{42}{\tan(60°)} \approx 24{,}2 \text{ m}.$$

Enfin, $AE = AB + BE$. Or par similitude $AE = 1{,}4 \times AB = 56$ m. Donc :

$$AM = AE - EM \approx 56 - 24{,}2 = 31{,}8 \text{ m}.$$

L'aire de AMD avec base AM et hauteur DE vaut :

$$\mathcal{A} \approx \frac{31{,}8 \times 42}{2} = 667{,}8 \text{ m}^2.$$

Correction 8

Échelle 1 : 25 signifie que les longueurs réelles sont 25 fois plus grandes.

$$18 \text{ cm} \times 25 = 450 \text{ cm} = 4{,}5 \text{ m}.$$

$$7{,}2 \text{ cm} \times 25 = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}.$$

Les aires sont multipliées par $25^2 = 625$:

$$64{,}8 \text{ cm}^2 \times 625 = 40500 \text{ cm}^2 = 4{,}05 \text{ m}^2.$$

Les volumes sont multipliés par $25^3 = 15625$:

$$1944 \text{ cm}^3 \times 15625 = 30\,375\,000 \text{ cm}^3 = 30{,}375 \text{ m}^3.$$

Correction 9

$$AB^2 = (5-(-3))^2 + (4-2)^2 = 8^2 + 2^2 = 68.$$
$$AC^2 = (1-(-3))^2 + (-4-2)^2 = 4^2 + (-6)^2 = 52.$$
$$BC^2 = (1-5)^2 + (-4-4)^2 = (-4)^2 + (-8)^2 = 80.$$

Aucune égalité de Pythagore n'apparaît : le triangle n'est pas rectangle. Les trois longueurs sont différentes, donc le triangle est scalène. Milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = I(1;3).$$

Pour que $ABDC$ soit un parallélogramme, il faut $\vec{AB} = \vec{CD}$.

$$\vec{AB} = (8;2), \qquad \vec{CD} = (9-1; -2-(-4)) = (8;2).$$

Donc $ABDC$ est bien un parallélogramme.

Correction 10

Chaque classe contient 28 élèves.

$$\overline{x}_A = \frac{6\times 2 + 8\times 4 + 10\times 6 + 12\times 8 + 15\times 5 + 18\times 3}{28} = \frac{329}{28} = 11{,}75.$$
$$\overline{x}_B = \frac{6\times 1 + 8\times 5 + 10\times 7 + 12\times 5 + 15\times 6 + 18\times 4}{28} = \frac{338}{28} \approx 12{,}07.$$

Pour 28 valeurs, la médiane est la moyenne des 14e et 15e valeurs. En 3e A, les 14e et 15e valeurs sont 12 : médiane 12. En 3e B, les 14e et 15e valeurs sont 12 : médiane 12. L'étendue vaut $18-6=12$ pour les deux classes. La classe B a une moyenne un peu plus élevée et plus de notes supérieures ou égales à 15, mais les médianes et étendues sont identiques. L'affirmation est donc partiellement vraie, mais elle ne suffit pas à elle seule pour comparer complètement les deux classes.

Correction 11

Comme on remet le jeton, les deux tirages sont indépendants.

$$P(RR) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{4}.$$

Exactement un rouge : rouge puis non rouge, ou non rouge puis rouge.

$$P(\text{exactement un rouge}) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Deux couleurs identiques :

$$P(\text{même}) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{25+9+4}{100} = \frac{38}{100}.$$

Donc deux couleurs différentes :

$$1 - \frac{38}{100} = \frac{62}{100} = 0{,}62.$$

Sur 200 répétitions, on peut estimer environ $200 \times \dfrac{1}{4} = 50$ doubles rouges, mais on ne peut pas prévoir exactement le résultat à cause du hasard.

Correction 12

Le prix après remise est : prix initial $\times(1-$ taux de remise). Une formule possible en D2 est :

`=B2*(1-C2).`

Prix :

$$84 \times 0{,}85 = 71{,}40\,€,$$

$$56 \times 0{,}80 = 44{,}80\,€,$$

$$32 \times 0{,}875 = 28\,€.$$

Avec 3,50 € de frais fixes, une formule en E2 est :

`=D2+3,5`

ou directement :

`=B2*(1-C2)+3,5.`

Correction 13

Pour obtenir le motif, on doit tracer deux côtés consécutifs puis recommencer une deuxième fois. Après le premier côté, il faut tourner de 60°, puis après le deuxième côté il faut tourner de 120°. Les instructions manquantes sont donc :

$$\boxed{\text{instruction } 1 = \text{A}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\text{instruction } 2 = \text{C}}.$$

Le quadrilatère obtenu a ses côtés opposés parallèles deux à deux : c'est un parallélogramme. Comme les quatre segments du motif mesurent 35 pas, c'est plus précisément un losange. Si un seul motif sur trois affiche « gagné », la probabilité vaut :

$$\boxed{\frac{1}{3}}.$$

Correction 14

Aire du fond :

$$(2x+1)(x+2) = 2x^2 + 5x + 2.$$

Le volume est aire du fond × profondeur :

$$V(x) = 0{,}8(2x+1)(x+2).$$

Pour $x = 3$:

$$V(3) = 0{,}8 \times 7 \times 5 = 28 \text{ m}^3.$$

Comme la condition demande un volume strictement supérieur à 28 m^3, $x = 3$ ne convient pas car $V(3) = 28$ m^3 exactement. Pour $x = 4$:

$$V(4) = 0{,}8 \times 9 \times 6 = 43{,}2 \text{ m}^3.$$

Aire du fond pour $x = 4$:

$$9 \times 6 = 54 \text{ m}^2.$$

Coût :

$$54 \times 18 = 972\,€.$$