Mini fiche de révision

Bac STI2D – Partie Mathématiques

Épreuve de spécialité Physique-Chimie et Mathématiques – version compacte style Bac

1. Objectif de la partie mathématiques STI2D

La partie mathématiques évalue surtout la capacité à utiliser un modèle : fonction, intégrale, équation différentielle ou nombre complexe dans un contexte technologique.

$$\boxed{\text{Lire le contexte} \implies \text{modéliser} \implies \text{calculer} \implies \text{interpréter avec unités}}$$

Priorité	Chapitre	Savoir-faire Bac
1	Fonctions, dérivées, variations	Étudier une évolution, un maximum, un minimum, un seuil.
2	Exponentielle et logarithme	Modèles de refroidissement, charge, décharge, croissance/décroissance.
3	Intégrales	Aire, énergie, quantité cumulée, valeur moyenne.
4	Équations différentielles	Résoudre un modèle simple avec condition initiale.
5	Nombres complexes	Module, argument, forme exponentielle, signal sinusoïdal.

2. Dérivées usuelles et composées

Dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$\ln x$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$

Dérivées composées :

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$, $u \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$, $u > 0$	$\frac{u'}{u}$

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (ku)' = ku', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0).$$

3. Variations d'une fonction

Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ croissante}, \qquad f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}, \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \text{point critique possible.}$$

Méthode Bac :

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser si possible.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Construire le tableau de variations.
5. Répondre à la question avec le contexte et les unités.

Exemple type : $f(t) = 18 + 72e^{-0{,}08t}$.

$$f'(t) = 72 \times (-0{,}08)e^{-0{,}08t} = -5{,}76e^{-0{,}08t} < 0.$$

Donc f est décroissante : la température diminue.

4. Exponentielle

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$(e^x)' = e^x, \qquad (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}, \qquad e^x > 0.$$
$$e^{a+b} = e^a e^b, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Résoudre une équation avec exponentielle :

$$e^u = A \ (A > 0) \quad \Longleftrightarrow \quad u = \ln(A).$$

Exemple :

$$18 + 72e^{-0{,}08t} = 40 \Longleftrightarrow e^{-0{,}08t} = \frac{11}{36} \Longleftrightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{11}{36}\right)}{0{,}08}.$$

5. Logarithme népérien

Le logarithme népérien est défini seulement sur $]0; +\infty[$.

$$\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln x} = x \ (x > 0).$$
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \ (a > 0, b > 0), \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \ (a > 0, b > 0),$$
$$\ln(a^n) = n \ln a \ (a > 0), \qquad \ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1.$$

Attention :

$$\boxed{\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b.}$$

Toujours vérifier le domaine : $\ln(u(x))$ existe seulement si $u(x) > 0$.

6. Primitives usuelles et composées

Une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$.

Primitives usuelles :

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x + C$
k	$kx + C$
x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$

Primitives composées :

$f(x)$	$F(x)$
$u'u^n$, $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{u'}{u}$, $u > 0$	$\ln u + C$
$u'e^u$	$e^u + C$

Pour une primitive composée, il faut reconnaître $u'(x)$ déjà présent. Exemple :

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{u'}{u} \quad \text{avec} \quad u = x^2 + 1,$$

donc une primitive est $\ln(x^2 + 1) + C$.

7. Intégrales et valeur moyenne

Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente une aire.
- Si $P(t)$ est une puissance en kW et t en heures, alors $\displaystyle\int_a^b P(t)\,dt$ est une énergie en kWh.

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemple STI2D :

$$P(t) = 0{,}4t^2 + 1{,}2t + 3, \quad E = \int_0^6 P(t)\,dt = 68{,}4 \text{ kWh}.$$

La puissance moyenne est :

$$m = \frac{68{,}4}{6} = 11{,}4 \text{ kW}.$$

8. Équations différentielles

$$y' = ay \quad \Longrightarrow \quad y(x) = Ce^{ax}.$$

$$y' = ay + b \quad (a \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

$$y' + ay = b \quad (a \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Méthode Bac :
1. Identifier a et b.
2. Écrire la solution générale.
3. Utiliser la condition initiale.
4. Trouver C.
5. Interpréter la limite si nécessaire.

Exemple :

$$u' = -0{,}5u + 6, \qquad u(0) = 0.$$

Solution générale :

$$u(t) = Ce^{-0{,}5t} + 12.$$

Avec $u(0) = 0$, on obtient $C = -12$, donc :

$$\boxed{u(t) = 12(1 - e^{-0{,}5t})}.$$

9. Nombres complexes

Un nombre complexe sous forme algébrique s'écrit :

$$z = a + ib, \qquad i^2 = -1.$$

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b, \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $z \neq 0$, une forme exponentielle est :

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \qquad \text{avec} \qquad r = |z|.$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Il faut vérifier le signe de a et de b pour choisir le bon quadrant.

Valeurs classiques :

$$1 = e^{i0}, \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad -1 = e^{i\pi}, \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Exemple :

$$z = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$, z est dans le premier quadrant, donc :

$$\boxed{z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}}.$$

10. Seuils et algorithmes

L'algorithmique sert souvent à chercher le premier rang ou le premier temps où un seuil est atteint.

Boucle tant que :

```
n = 0
while T(n) > 40:
    n = n + 1
print(n)
```

Interprétation : La boucle continue tant que la température est strictement supérieure à 40. À la fin, n est le plus petit entier tel que :

$$T(n) \leq 40.$$

11. Méthode Bac – étude complète d'une fonction

Pour une fonction f donnée dans un contexte technologique :

1. Identifier le domaine de définition.
2. Calculer les limites utiles.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variations.
6. Résoudre l'équation ou l'inéquation demandée.
7. Conclure avec une phrase dans le contexte.

Conditions à ne jamais oublier :

$$\ln u \Rightarrow u > 0, \qquad \frac{u}{v} \Rightarrow v \neq 0, \qquad \sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0.$$

12. Erreurs fréquentes à éviter

— Ne jamais écrire $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
— Ne pas oublier le coefficient dans $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$.
— Ne pas oublier la constante C dans une primitive ou une équation différentielle.
— Ne pas oublier les unités : minutes, secondes, volts, kW, kWh.
— Pour les complexes, ne pas choisir l'argument sans vérifier le quadrant.
— Pour une lecture graphique, toujours annoncer une valeur approchée.

13. Tableau final des formules à retenir

Thème	**Formule importante**
Tangente	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$
Exponentielle composée	$(e^u)' = u'e^u$
Logarithme composé	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $v \neq 0$
Intégrale	$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
Valeur moyenne	$m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$
Équation différentielle	$y' = ay + b \Rightarrow y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$
Module complexe	$\lvert a + ib \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Forme exponentielle	$z = re^{i\theta}$ avec $r = \lvert z \rvert$

Conseil final : apprendre les formules, puis refaire le sujet type sans regarder la correction.