

Baccalauréat technologique STI2D – Sujet type 2025

Correction détaillée – Partie Mathématiques

Épreuve Physique-Chimie et Mathématiques – Partie mathématiques uniquement

Objectif de la correction.

Cette correction détaille les méthodes attendues :

calcul → justification → interprétation

Exercice 1 – Refroidissement d'une pièce métallique

(5 points)

On considère :

$$T(t) = 18 + 72e^{-0,08t}$$

où t est exprimé en minutes et $T(t)$ en degrés Celsius.

1. Calcul de $T(0)$.

On remplace t par 0 :

$$T(0) = 18 + 72e^{-0,08 \times 0}.$$

Or :

$$e^0 = 1.$$

Donc :

$$T(0) = 18 + 72 \times 1.$$

$$T(0) = 90.$$

Ainsi :

$$T(0) = 90$$

Interprétation : au moment de l'arrêt de la machine, la température de la pièce métallique est de :

$$90^\circ\text{C}.$$

2. Limite de $T(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On sait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,08t} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (18 + 72e^{-0,08t}).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 18 + 72 \times 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 18$$

Interprétation : après un temps très long, la température de la pièce se rapproche de :

$$18^\circ\text{C}.$$

Cette valeur correspond à la température ambiante de l'atelier.

3. Calcul de $T'(t)$.

On a :

$$T(t) = 18 + 72e^{-0,08t}.$$

La dérivée de 18 est 0.

On utilise :

$$\left(e^{u(t)}\right)' = u'(t)e^{u(t)}.$$

Ici :

$$u(t) = -0,08t$$

donc :

$$u'(t) = -0,08.$$

Alors :

$$T'(t) = 72 \times (-0,08)e^{-0,08t}.$$

$$T'(t) = -5,76e^{-0,08t}.$$

Donc :

$$\boxed{T'(t) = -5,76e^{-0,08t}}$$

4. Signe de $T'(t)$ et variations.Pour tout réel t , on sait que :

$$e^{-0,08t} > 0.$$

Comme :

$$-5,76 < 0,$$

alors :

$$-5,76e^{-0,08t} < 0.$$

Donc :

$$T'(t) < 0.$$

Ainsi, la fonction T est strictement décroissante sur :

$$[0; +\infty[.$$

$$\boxed{T \text{ est décroissante sur } [0; +\infty[}$$

Interprétation : la température de la pièce diminue au cours du temps.5. Résolution de l'équation $T(t) = 40$.

On résout :

$$18 + 72e^{-0,08t} = 40.$$

On soustrait 18 :

$$72e^{-0,08t} = 22.$$

On divise par 72 :

$$e^{-0,08t} = \frac{22}{72}.$$

On simplifie :

$$e^{-0,08t} = \frac{11}{36}.$$

On applique le logarithme népérien :

$$\ln(e^{-0,08t}) = \ln\left(\frac{11}{36}\right).$$

Donc :

$$-0,08t = \ln\left(\frac{11}{36}\right).$$

Ainsi :

$$t = \frac{\ln\left(\frac{11}{36}\right)}{-0,08}.$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{11}{36}\right)}{0,08}.$$

À la calculatrice :

$$t \approx 14,81.$$

Donc :

$$t \approx 14,81 \text{ minutes}$$

Interprétation : la température atteint 40°C après environ :

$$14,81 \text{ minutes}.$$

6. Algorithme.

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$T(n) \leq 40.$$

Tant que la température est strictement supérieure à 40, on augmente n .

L'algorithme complété est donc :

$$n \leftarrow 0$$

Tant que $T(n) > 40$ faire

$$n \leftarrow n + 1$$

Fin Tant que

$$\boxed{\text{Tant que } T(n) > 40}$$

7. Valeur du plus petit entier n .

D'après la question 5 :

$$T(t) = 40$$

pour :

$$t \approx 14,81.$$

Comme T est décroissante, on a :

$$T(t) \leq 40$$

lorsque :

$$t \geq 14,81.$$

Le plus petit entier supérieur ou égal à 14,81 est :

$$15.$$

Donc :

$$\boxed{n = 15}$$

Interprétation : au bout de 15 minutes, la température est inférieure ou égale à 40°C.

Exercice 2 – Énergie consommée par un système de ventilation (5 points)

On considère :

$$P(t) = 0,4t^2 + 1,2t + 3$$

où t est exprimé en heures et $P(t)$ en kilowatts.

L'énergie consommée sur $[0; 6]$ est :

$$E = \int_0^6 P(t) dt.$$

1. Calcul d'une primitive de P .

On cherche une primitive de :

$$P(t) = 0,4t^2 + 1,2t + 3.$$

On utilise :

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}, \quad \int t dt = \frac{t^2}{2}, \quad \int 1 dt = t.$$

Donc une primitive F de P est :

$$F(t) = 0,4 \times \frac{t^3}{3} + 1,2 \times \frac{t^2}{2} + 3t.$$

Or :

$$0,4 = \frac{2}{5}.$$

Donc :

$$0,4 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Et :

$$1,2 \times \frac{1}{2} = 0,6.$$

Ainsi :

$$F(t) = \frac{2}{15}t^3 + 0,6t^2 + 3t.$$

$$F(t) = \frac{2}{15}t^3 + 0,6t^2 + 3t$$

2. Calcul de l'énergie consommée.

On calcule :

$$E = \int_0^6 P(t) dt.$$

Comme F est une primitive de P , on a :

$$E = F(6) - F(0).$$

Calculons $F(6)$:

$$F(6) = \frac{2}{15} \times 6^3 + 0,6 \times 6^2 + 3 \times 6.$$

$$F(6) = \frac{2}{15} \times 216 + 0,6 \times 36 + 18.$$

$$F(6) = \frac{432}{15} + 21,6 + 18.$$

$$F(6) = 28,8 + 21,6 + 18.$$

$$F(6) = 68,4.$$

Calculons $F(0)$:

$$F(0) = 0.$$

Donc :

$$E = 68,4 - 0.$$

$$\boxed{E = 68,4}$$

Comme $P(t)$ est en kW et t en heures, l'énergie est exprimée en kWh.

Donc :

$$\boxed{E = 68,4 \text{ kWh}}$$

3. Valeur moyenne de la puissance.

La valeur moyenne de P sur $[0; 6]$ est :

$$m = \frac{1}{6 - 0} \int_0^6 P(t) dt.$$

Donc :

$$m = \frac{1}{6} \times 68,4.$$

$$m = 11,4.$$

Ainsi :

$$\boxed{m = 11,4 \text{ kW}}$$

4. Interprétation.

Sur les six premières heures, le système de ventilation consomme en moyenne une puissance de :

$$\boxed{11,4 \text{ kW}}.$$

Cela signifie que, sur cette durée, la consommation totale est la même que si le système avait fonctionné pendant 6 heures avec une puissance constante de 11,4 kW.

5. Lecture graphique de $P(4)$.

À l'aide du graphique, on lit que pour :

$$t = 4,$$

la puissance est environ :

$$14,2.$$

On peut vérifier par le calcul :

$$P(4) = 0,4 \times 4^2 + 1,2 \times 4 + 3.$$

$$P(4) = 0,4 \times 16 + 4,8 + 3.$$

$$P(4) = 6,4 + 4,8 + 3.$$

$$P(4) = 14,2.$$

Donc :

$$P(4) \approx 14,2 \text{ kW}$$

Interprétation : au bout de 4 heures, le système consomme environ 14,2 kW.

Exercice 3 – Charge d'un condensateur**(5 points)**

On considère l'équation différentielle :

$$u' = -0,5u + 6$$

avec :

$$u(0) = 0.$$

1. Forme générale des solutions.

L'équation est :

$$y' = -0,5y + 6.$$

Elle est du type :

$$y' = ay + b$$

avec :

$$a = -0,5 \quad b = 6.$$

Pour une équation du type :

$$y' = ay + b,$$

avec $a \neq 0$, les solutions sont :

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}.$$

Ici :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0,5} = 12.$$

Donc :

$$y(t) = Ce^{-0,5t} + 12.$$

Ainsi, la forme générale des solutions est :

$$y(t) = Ce^{-0,5t} + 12$$

où C est une constante réelle.**2. Solution particulière vérifiant $u(0) = 0$.**

On cherche :

$$u(t) = Ce^{-0,5t} + 12.$$

On utilise :

$$u(0) = 0.$$

Donc :

$$Ce^{-0,5 \times 0} + 12 = 0.$$

Or :

$$e^0 = 1.$$

Donc :

$$C + 12 = 0.$$

$$C = -12.$$

La solution particulière est donc :

$$u(t) = -12e^{-0,5t} + 12.$$

On peut écrire :

$$u(t) = 12 - 12e^{-0,5t}$$

3. Vérification de la forme demandée.

On a trouvé :

$$u(t) = 12 - 12e^{-0,5t}.$$

On factorise par 12 :

$$u(t) = 12(1 - e^{-0,5t}).$$

Donc :

$$\boxed{u(t) = 12(1 - e^{-0,5t})}$$

4. Limite de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On sait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 12(1 - e^{-0,5t}).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 12(1 - 0).$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 12}$$

Interprétation : la tension du condensateur se rapproche de :

$$\boxed{12 \text{ V}}.$$

C'est la tension limite du circuit.

5. Résolution de l'inéquation $u(t) \geq 10$.

On résout :

$$12(1 - e^{-0,5t}) \geq 10.$$

On divise par $12 > 0$:

$$1 - e^{-0,5t} \geq \frac{10}{12}.$$

$$1 - e^{-0,5t} \geq \frac{5}{6}.$$

On soustrait 1 :

$$-e^{-0,5t} \geq \frac{5}{6} - 1.$$

$$-e^{-0,5t} \geq -\frac{1}{6}.$$

On multiplie par -1 , donc on change le sens de l'inégalité :

$$e^{-0,5t} \leq \frac{1}{6}.$$

On applique le logarithme népérien, qui est strictement croissant :

$$\ln(e^{-0,5t}) \leq \ln\left(\frac{1}{6}\right).$$

Donc :

$$-0,5t \leq \ln\left(\frac{1}{6}\right).$$

On divise par $-0,5$, nombre négatif, donc on change le sens de l'inégalité :

$$t \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-0,5}.$$

$$t \geq -2 \ln\left(\frac{1}{6}\right).$$

Comme :

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln(6),$$

on obtient :

$$t \geq 2 \ln(6).$$

À la calculatrice :

$$2 \ln(6) \approx 3,58.$$

Donc :

$$\boxed{t \geq 3,58}$$

6. Interprétation.

La tension du condensateur atteint au moins 10 V à partir de :

$$\boxed{3,58 \text{ secondes environ}}.$$

Cela signifie que pour tout temps supérieur ou égal à environ 3,58 secondes, la tension est au moins égale à 10 V.

Exercice 4 – Nombres complexes et signal électrique**(5 points)**

On considère :

$$z = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

1. Partie réelle et partie imaginaire.

Un nombre complexe sous forme algébrique s'écrit :

$$z = a + ib.$$

Ici :

$$z = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

Donc :

$$\operatorname{Re}(z) = 2$$

et :

$$\operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = 2}$$

et :

$$\boxed{\operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{3}}$$

2. Calcul du module $|z|$.

Pour :

$$z = a + ib,$$

le module est :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ici :

$$a = 2 \quad b = 2\sqrt{3}.$$

Donc :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}.$$

$$|z| = \sqrt{4 + 4 \times 3}.$$

$$|z| = \sqrt{4 + 12}.$$

$$|z| = \sqrt{16}.$$

$$|z| = 4.$$

Donc :

$$\boxed{|z| = 4}$$

3. Détermination d'un argument de z .On cherche un angle θ tel que :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Comme :

$$|z| = 4,$$

on a :

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Et :

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On reconnaît :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

et :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc un argument de z est :

$$\boxed{\frac{\pi}{3}}$$

4. Forme exponentielle de z .

La forme exponentielle est :

$$z = re^{i\theta},$$

où :

$$r = |z|$$

et θ est un argument de z .

Ici :

$$r = 4$$

et :

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

5. Forme algébrique de w .

On considère :

$$w = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On utilise :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Donc :

$$w = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Or :

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et :

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$w = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

$$w = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Ainsi :

$$\boxed{w = 2\sqrt{3} + 2i}$$

6. Module de w et comparaison avec $|z|$.

Comme :

$$w = 4e^{i\frac{\pi}{6}},$$

son module est directement :

$$|w| = 4.$$

On avait trouvé :

$$|z| = 4.$$

Donc :

$$|w| = |z|.$$

Ainsi :

$$\boxed{|w| = |z| = 4}$$

Interprétation : les deux signaux ont le même module.**Bilan final**

Les réponses finales importantes sont :

$$\boxed{T(0) = 90^\circ\text{C}}$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 18^\circ\text{C}}$$

$$\boxed{T'(t) = -5,76e^{-0,08t}}$$

$$\boxed{T(t) = 40 \iff t \approx 14,81 \text{ min}}$$

$$\boxed{n = 15}$$

$$\boxed{E = 68,4 \text{ kWh}}$$

$$\boxed{m = 11,4 \text{ kW}}$$

$$\boxed{u(t) = 12(1 - e^{-0,5t})}$$

$$\boxed{u(t) \geq 10 \iff t \geq 2 \ln(6) \approx 3,58 \text{ s}}$$

$$\boxed{z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\boxed{w = 2\sqrt{3} + 2i}$$

$$\boxed{|w| = |z| = 4}$$