

Sujet de révision - Préparation Bac

Terminale générale - spécialité mathématiques

Objectif. QCM justifié, probabilités, suites, fonctions, intégrales, géométrie dans l'espace, équations différentielles, variables aléatoires et combinatoire. Faire les exercices sans regarder la correction.

Exercices de révision

Exercice 1 – QCM argumenté

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est **vraie** ou **fausse**. Chaque réponse doit être justifiée.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4xe^{-x}.$$

Affirmation :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^x - x^2.$$

Affirmation : g est convexe sur \mathbb{R} .

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3.$$

Affirmation :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15.$$

4. On considère la fonction h définie sur $[0; 2]$ par :

$$h(x) = x^2 + 1.$$

Affirmation :

$$\int_0^2 h(x) dx = \frac{14}{3}.$$

5. On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x) - x.$$

Affirmation : φ admet un maximum égal à -1 .

Exercice 2 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale

5 points

Dans une population, une maladie touche 4% des individus. Un test de dépistage est utilisé. On note :

$$M : \text{“l'individu est malade”}, \quad T : \text{“le test est positif”}.$$

On donne :

$$P(M) = 0,04, \quad P_M(T) = 0,95, \quad P_{\overline{M}}(T) = 0,03.$$

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer $P(M \cap T)$.
3. Montrer que $P(T) = 0,0668$.
4. Calculer $P_T(M)$. Interpréter le résultat.

- On teste indépendamment 120 individus. On note X le nombre de tests positifs. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
- Calculer $P(X = 0)$ puis $P(X \geq 1)$. On donnera des valeurs arrondies à 10^{-3} .

Exercice 3 – Suite récurrente et modèle d'évolution**5 points**

Une plante marine colonise une zone côtière. Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie, en hectares, recouverte par cette plante au 1er juillet de l'année $2026 + n$.

On donne :

$$u_0 = 1,$$

et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

On considère la fonction f définie sur $[0; 15]$ par :

$$f(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que f est croissante sur $[0; 15]$.

1. Calculer u_1 et interpréter le résultat.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0; 15]$,

$$f(x) - x = x(0,3 - 0,02x).$$

3. En déduire que, pour tout $x \in [0; 15]$, $f(x) \geq x$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15.$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. Déterminer sa limite.

7. Compléter l'algorithme Python suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10$.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while .....:
        n = .....
        u = .....
    return n
```

Exercice 4 – Fonction logarithme et théorème des valeurs intermédiaires**5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \ln(x).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

4. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

6. Montrer que :

$$1 < \alpha < 2.$$

7. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 – Exponentielle, convexité et tangente**5 points**

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
2. Montrer que g est convexe sur \mathbb{R} .
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
4. En déduire que, pour tout réel x ,

$$e^x \geq x + 1.$$
5. Étudier le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .
6. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 6 – Intégrales et intégration par parties**5 points**

On considère la fonction f définie sur $[1; e]$ par :

$$f(x) = x \ln(x).$$

1. Justifier que $f(x) \geq 0$ sur $[1; e]$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$I = \int_1^e x \ln(x) dx.$$

On pourra poser $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$.

3. Donner une interprétation graphique de I .
4. Calculer :

$$J = \int_1^e (x \ln(x) - x + 1) dx.$$

Exercice 7 – Géométrie dans l'espace : plan, droite, projection**5 points**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$A(1; 1; 1), \quad B(3; 0; 1), \quad C(1; 3; 0), \quad D(4; 3; 2).$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
3. Montrer que le vecteur

$$\vec{n} = (1; 2; 4)$$
 est normal au plan (ABC) .
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
5. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) .
6. Déterminer les coordonnées du point H , intersection de Δ avec le plan (ABC) .
7. Que représente H pour le point D et le plan (ABC) ?

Exercice 8 – Équation différentielle avec second membre**5 points**

On considère l'équation différentielle :

$$y' = 0,5y - 3.$$

1. Vérifier que la fonction constante $y = 6$ est solution particulière.
2. On pose $z = y - 6$. Montrer que z vérifie :

$$z' = 0,5z.$$

3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
4. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 10$.
5. Étudier le comportement de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 – Variable aléatoire : espérance et variance**5 points**

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4 selon la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $E(X^2)$.
4. En déduire $V(X)$.
5. Calculer l'écart type $\sigma(X)$, arrondi à 10^{-3} .
6. Interpréter l'espérance si X représente un gain en euros.

Exercice 10 – Dénombrement et combinatoire**5 points**

Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves. Elle souhaite former un groupe de 5 élèves.

1. Combien de groupes différents de 5 élèves peut-elle former ?
2. Deux élèves particuliers, Alice et Sami, ne veulent pas être ensemble dans le même groupe. Combien de groupes de 5 élèves peut-on former ?
3. Un code est constitué de 4 lettres choisies parmi les lettres A, B, C, D, E, F . Les répétitions sont autorisées. Combien de codes différents peut-on former ?
4. Combien de codes contiennent exactement deux fois la lettre A ?
5. Combien de codes ne contiennent pas la lettre A ?