Révision complète Bac

Terminale spécialité mathématiques

Exercices seuls - format type Bac

Ce dossier couvre les grands blocs du programme : suites, fonctions, limites, logarithme, exponentielle, convexité, intégrales, géométrie dans l'espace, probabilités, loi binomiale, variables aléatoires, équations différentielles, combinatoire et algorithmique. Les exercices sont classés par thèmes, mais les questions mélangent souvent plusieurs compétences comme dans les sujets de Bac.

Partie 1 : Automatismes, QCM et raisonnement rapide

Exercice 1 - QCM type Bac

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée dans le sujet.

Question 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$. On a :

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ **D.** la limite n'existe pas

Question 2. Si $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}3)$, alors $E(X) =$

A. $0{,}3$ **B.** 6

C. 20 **D.** 14

Question 3. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ est :

A. $x^3 - x^2 + x$ **B.** $9x - 2$

C. $x^3 - 2x^2 + x$ **D.** $3x^3 - x^2 + x$

Question 4. Dans l'espace, le plan d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$ admet pour vecteur normal :

A. $(2; -1; 3)$ **B.** $(2; 1; 3)$

C. $(-1; 3; -5)$ **D.** $(1; 2; 3)$

Question 5. La fonction $g(x) = e^x - x^2$ est convexe sur un intervalle où :

A. $e^x - 2 \geq 0$ **B.** $e^x - 2x \geq 0$

C. $e^x - x^2 \geq 0$ **D.** $e^x + 2 \leq 0$

Question 6. L'équation $\ln(x) = 2$ a pour solution :

A. $x = \ln(2)$ **B.** $x = e^2$

C. $x = 2e$ **D.** $x = \sqrt{e}$

Exercice 2 - Vrai/Faux avec justification

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel x, on a $e^x \geq x + 1$.
4. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

5. La droite
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
a pour vecteur directeur $(2; -1; 1)$.

Partie 2 : Suites et algorithmique

Exercice 3 - Suite récurrente et seuil

Une espèce végétale colonise une zone. On note u_n la superficie, en hectares, occupée au bout de n années. On donne
$$u_0 = 2$$
et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$
On considère la fonction h définie sur $[0; 15]$ par
$$h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x.$$
On admet que h est croissante sur $[0; 15]$.

1. Calculer u_1. Interpréter.
2. Montrer que $h(x) - x = 0{,}02x(15 - x)$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15.$$
4. En déduire que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer sa limite.
6. Compléter l'algorithme pour déterminer le plus petit rang n tel que $u_n \geq 12$.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 2$
Tant que …… faire
  $n \leftarrow$ ……
  $u \leftarrow$ ……
Fin Tant que
Afficher n

Exercice 4 - Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (v_n) définie par
$$v_0 = 50$$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 0{,}85v_n + 12.$$

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Montrer que si (v_n) converge vers une limite L, alors $L = 80$.
3. On pose $w_n = v_n - 80$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
4. Exprimer w_n, puis v_n, en fonction de n.
5. Déterminer la limite de (v_n).
6. Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n \geq 75$.

Exercice 5 - Suite géométrique et modèle d'évolution

Une population est estimée à 12000 individus. Elle diminue de 6% par an. On note p_n la population, en milliers d'individus, après n années.

1. Donner p_0 et une relation de récurrence vérifiée par (p_n).
2. Justifier que (p_n) est géométrique.
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de (p_n).
5. Déterminer à partir de quelle année la population devient inférieure à 6000 individus, c'est-à-dire $p_n < 6$.

Partie 3 : Fonctions, limites, logarithme et exponentielle

Exercice 6 - Logarithme, TVI et signe

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - 2 + \ln(x).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.
5. Montrer que $1 < \alpha < 2$.
6. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 7 - Exponentielle, variations et équation

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = xe^{-x} + 1.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
3. Montrer que $g'(x) = e^{-x}(1 - x)$.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;0[$.
6. Donner un encadrement de cette solution entre deux entiers consécutifs.

Exercice 8 - Convexité et tangente

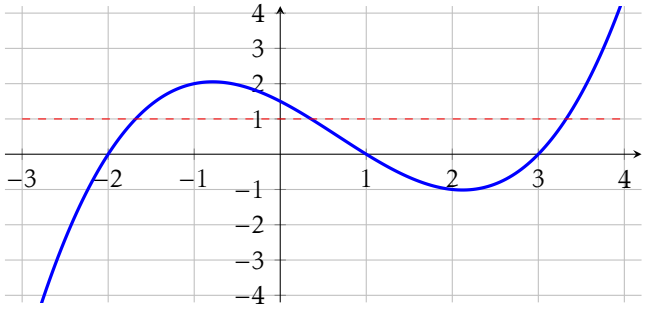
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = e^x - x - 1.$$

1. Calculer $\varphi'(x)$, puis $\varphi''(x)$.
2. Montrer que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de φ au point d'abscisse 0.
4. En déduire que, pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.
5. Résoudre $\varphi(x) = 0$.

Exercice 9 - Lecture graphique et variations

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-3;4]$.



1. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
2. Donner une valeur approchée de chaque solution.
3. Donner le signe de $f(x) - 1$ graphiquement.
4. Expliquer pourquoi une lecture graphique ne remplace pas une preuve algébrique.

Partie 4 : Intégrales et équations différentielles

Exercice 10 - Intégrale et intégration par parties

On considère la fonction f définie sur $[1;e]$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

1. Justifier que $f(x) \geq 0$ sur $[1;e]$.
2. Calculer
$$I = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$
à l'aide d'une intégration par parties.
3. Interpréter graphiquement I.
4. Calculer
$$J = \int_1^e \left(x\ln(x) - x + 1\right)dx.$$

Exercice 11 - Aire entre deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;2]$ par

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1.$$

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0;2]$.
2. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes sur $[0;2]$, en séparant l'intégrale si nécessaire afin d'intégrer la différence positive.
3. Donner la valeur exacte de cette aire.

Exercice 12 - Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y' = 0{,}4y.$$

1. Donner la forme générale des solutions.
2. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 5$.

3. Calculer $f(3)$.
4. Résoudre $f(x) = 20$.

Exercice 13 - Équation différentielle avec second membre

On considère l'équation différentielle

$$y' = 2y - 6.$$

1. Vérifier que la fonction constante $y = 3$ est solution particulière.
2. On pose $z = y - 3$. Montrer que $z' = 2z$.
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation.
4. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 5$.
5. Étudier son comportement quand $x \to +\infty$.

Partie 5 : Géométrie dans l'espace

Exercice 14 - Plan, droite et projection orthogonale

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(1;0;2), \quad B(3;1;0), \quad C(0;2;1), \quad D(2;3;4).$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les points A, B, C définissent un plan.
3. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
5. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC).
6. Déterminer les coordonnées du point $H = \Delta \cap (ABC)$.
7. Que représente H pour le point D et le plan (ABC) ?
8. Calculer la distance DH, c'est-à-dire la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 15 - Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$2x - y + 2z - 5 = 0$$

et le point

$$M(3;1;4).$$

1. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$.
4. Calculer la distance MH.
5. Vérifier la formule de distance point-plan dans ce cas.

Partie 6 : Probabilités, loi binomiale et variables aléatoires

Exercice 16 - Probabilités conditionnelles

Une entreprise fabrique des pièces. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} si nécessaire. On note D l'événement « la pièce est défectueuse » et T l'événement « le test est positif ». On sait que

$$P(D) = 0{,}04, \qquad P_D(T) = 0{,}96, \qquad P_{\overline{D}}(T) = 0{,}05.$$

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(D \cap T)$.
3. Calculer $P(\overline{D} \cap T)$.
4. En déduire $P(T)$.
5. Calculer $P_T(D)$.
6. Interpréter le résultat.

Exercice 17 - Loi binomiale

Un composant électronique a une probabilité 0,03 d'être défectueux. On prélève 80 composants de manière indépendante. On note X le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Donner les paramètres de cette loi.
3. Calculer $P(X = 0)$.
4. Calculer $P(X \geq 1)$.
5. Calculer l'espérance de X et interpréter.
6. Déterminer à la calculatrice le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0{,}95$.

Exercice 18 - Variable aléatoire, espérance et variance

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 selon la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $E(X^2)$.
4. En déduire $V(X)$.
5. Calculer l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 19 - Combinatoire

Une classe contient 31 élèves. On souhaite former un groupe de 5 élèves.

1. Combien de groupes différents peut-on former ?
2. Deux élèves particuliers, Alice et Karim, ne veulent pas être ensemble. Combien de groupes de 5 élèves peut-on former ?
3. Un code est constitué de 4 lettres choisies parmi A, B, C, D, E, F, avec répétition autorisée. Combien de codes peut-on former ?
4. Combien de codes contiennent exactement deux fois la lettre A ?
5. Combien de codes ne contiennent pas la lettre A ?
6. Combien de codes peut-on former si les répétitions sont interdites ?

Exercice 20 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Une usine fabrique des batteries. La durée de vie, en heures, d'une batterie choisie au hasard est modélisée par

une variable aléatoire X. On sait que

$$E(X) = 1200 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 2500.$$

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

1. Interpréter, dans le contexte, l'événement $|X - 1200| \geq 100$.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité
$$P(|X - 1200| \geq 100).$$
3. En déduire une minoration de la probabilité
$$P(1100 < X < 1300).$$
4. On choisit maintenant n batteries indépendamment et on note F_n la fréquence des batteries dont la durée de vie appartient à l'intervalle $]1100; 1300[$. Expliquer pourquoi, lorsque n est grand, F_n devrait être proche de la probabilité trouvée à la question précédente.