Révision complète Bac

Terminale spécialité mathématiques

Correction détaillée - 20 exercices

Cette correction détaille les méthodes attendues au Bac : calculs justifiés, choix des théorèmes, interprétations et résultats exacts lorsque c'est possible. Les arrondis sont donnés seulement lorsqu'ils sont demandés ou utiles.

Partie 1 : Automatismes, QCM et raisonnement rapide

Exercice 1 - QCM type Bac

1. On utilise la croissance comparée :
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$
Réponse correcte : **B**.

2. Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, alors $E(X) = np$. Ici :
$$E(X) = 20 \times 0{,}3 = 6.$$
Réponse correcte : **B**.

3. On primitive terme à terme :
$$\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = x^3 - x^2 + x + C.$$
Réponse correcte : **A**.

4. Pour un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, un vecteur normal est $(a;b;c)$. Donc ici :
$$\vec{n} = (2;-1;3).$$
Réponse correcte : **A**.

5. Une fonction deux fois dérivable est convexe sur les intervalles où sa dérivée seconde est positive. Pour $g(x) = e^x - x^2$,
$$g'(x) = e^x - 2x, \qquad g''(x) = e^x - 2.$$
Donc g est convexe lorsque $e^x - 2 \geq 0$.
Réponse correcte : **A**.

6. $\ln(x) = 2$ équivaut à $x = e^2$, avec $x > 0$.
Réponse correcte : **B**.

Exercice 2 - Vrai/Faux avec justification

1. **Vrai.** Toute suite croissante et majorée converge. C'est le théorème de convergence monotone.
2. **Faux.** La fonction logarithme népérien est définie seulement sur :
$$]0;+\infty[.$$
3. **Vrai.** On peut poser $\varphi(x) = e^x - x - 1$. Comme $\varphi''(x) = e^x > 0$, la fonction est convexe. Sa tangente en 0 est $y = 0$, donc $\varphi(x) \geq 0$. Ainsi :
$$e^x \geq x + 1.$$

4. **Faux.** Si A et B sont indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

et non $P(A) + P(B)$.

5. **Vrai.** Une représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

a pour vecteur directeur le vecteur formé par les coefficients de t :

$$\vec{u} = (2; -1; 1).$$

Partie 2 : Suites et algorithmique

Exercice 3 - Suite récurrente et seuil

On a $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$, avec

$$h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x.$$

1.

$$u_1 = -0{,}02 \times 2^2 + 1{,}3 \times 2 = -0{,}08 + 2{,}6 = 2{,}52.$$

Après une année, la superficie occupée est 2,52 hectares.

2.

$$h(x) - x = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - x = -0{,}02x^2 + 0{,}3x.$$

On factorise :

$$h(x) - x = 0{,}02x(15 - x).$$

3. Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15$.
Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 2{,}52,$$

donc $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 15$.
Hérédité. Supposons que $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15$. Comme h est croissante sur $[0; 15]$,

$$h(u_n) \leq h(u_{n+1}),$$

donc

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus, pour $x \in [0; 15]$,

$$h(x) - x = 0{,}02x(15 - x) \geq 0,$$

donc $h(x) \geq x$. Enfin,

$$h(15) = -0{,}02 \times 225 + 1{,}3 \times 15 = -4{,}5 + 19{,}5 = 15.$$

Comme $u_{n+1} \leq 15$, on obtient $u_{n+2} = h(u_{n+1}) \leq h(15) = 15$. Ainsi :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 15.$$

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 15. Donc elle converge.
5. Notons ℓ sa limite. Comme h est continue,

$$\ell = -0{,}02\ell^2 + 1{,}3\ell.$$

Donc :

$$0 = -0{,}02\ell^2 + 0{,}3\ell = \ell(0{,}3 - 0{,}02\ell).$$

Les solutions sont $\ell = 0$ ou $\ell = 15$. Comme $u_n \geq 2$, on a $\ell \geq 2$. Donc :

$$\ell = 15.$$

6. L'algorithme complété est :

$$\begin{aligned}&n \leftarrow 0\\&u \leftarrow 2\\&\text{Tant que } u < 12 \text{ faire}\\&\quad n \leftarrow n+1\\&\quad u \leftarrow -0{,}02u^2 + 1{,}3u\\&\text{Fin Tant que}\\&\text{Afficher } n\end{aligned}$$

En effectuant les itérations, on trouve le premier rang :

$$n = 12.$$

Exercice 4 - Suite arithmético-géométrique

1. $$v_1 = 0{,}85 \times 50 + 12 = 42{,}5 + 12 = 54{,}5.$$

Puis :

$$v_2 = 0{,}85 \times 54{,}5 + 12 = 46{,}325 + 12 = 58{,}325.$$

2. Si (v_n) converge vers L, alors en passant à la limite dans $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 12$,

$$L = 0{,}85L + 12.$$

Donc :

$$0{,}15L = 12 \quad \Rightarrow \quad L = 80.$$

3. On pose $w_n = v_n - 80$. Alors :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 80 = 0{,}85v_n + 12 - 80 = 0{,}85v_n - 68.$$

Or $68 = 0{,}85 \times 80$, donc :

$$w_{n+1} = 0{,}85(v_n - 80) = 0{,}85w_n.$$

Ainsi (w_n) est géométrique de raison $0{,}85$.

4. $$w_0 = v_0 - 80 = 50 - 80 = -30.$$

Donc :

$$w_n = -30(0{,}85)^n.$$

Comme $v_n = w_n + 80$, on obtient :

$$v_n = 80 - 30(0{,}85)^n.$$

5. Comme $-1 < 0{,}85 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} (0{,}85)^n = 0.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 80.$$

6. On cherche :

$$80 - 30(0{,}85)^n \geq 75.$$

Donc :

$$30(0{,}85)^n \leq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad (0{,}85)^n \leq \frac{1}{6}.$$

Comme $0 < 0{,}85 < 1$, on obtient :

$$n \geq \frac{\ln(1/6)}{\ln(0{,}85)} \approx 11{,}02.$$

Le plus petit entier convenable est donc :

$$n = 12.$$

Exercice 5 - Suite géométrique et modèle d'évolution

1. La population initiale est 12000 individus, soit 12 milliers. Donc :

$$p_0 = 12.$$

Elle diminue de 6%, donc elle est multipliée chaque année par $1 - 0{,}06 = 0{,}94$. Ainsi :

$$p_{n+1} = 0{,}94 p_n.$$

2. La suite (p_n) est géométrique car chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par une constante. Sa raison est 0,94.

3.

$$p_n = 12(0{,}94)^n.$$

4. Comme $0 < 0{,}94 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} (0{,}94)^n = 0.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.$$

5. On cherche $p_n < 6$, c'est-à-dire :

$$12(0{,}94)^n < 6.$$

Donc :

$$(0{,}94)^n < \frac{1}{2}.$$

Avec les logarithmes :

$$n > \frac{\ln(1/2)}{\ln(0{,}94)} \approx 11{,}20.$$

Le plus petit entier est donc :

$$n = 12.$$

La population devient inférieure à 6000 individus à partir de la 12^{e} année.

Partie 3 : Fonctions, limites, logarithme et exponentielle

Exercice 6 - Logarithme, TVI et signe

1. La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

2.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

Sur $]0;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 1 > 0$. Donc :

$$f'(x) > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Quand $x \to 0^+$, on a $\ln x \to -\infty$ et $x - 2 \to -2$. Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Quand $x \to +\infty$, on a $x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec des limites $-\infty$ et $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

5.

$$f(1) = 1 - 2 + \ln 1 = -1 < 0.$$

Et :

$$f(2) = 2 - 2 + \ln 2 = \ln 2 > 0.$$

Comme f est continue et strictement croissante, on obtient :

$$1 < \alpha < 2.$$

6. Comme f est strictement croissante et s'annule en α,

$$f(x) < 0 \text{ sur }]0;\alpha[, \quad f(\alpha) = 0, \quad f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha;+\infty[.$$

Exercice 7 - Exponentielle, variations et équation

1.

$$g(x) = xe^{-x} + 1 = \frac{x}{e^x} + 1.$$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

2. Lorsque $x \to -\infty$, on a $-x \to +\infty$, donc $e^{-x} \to +\infty$, tandis que $x \to -\infty$. Ainsi :

$$xe^{-x} \to -\infty,$$

et donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

3. Par produit :

$$g'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x).$$

4. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - x$. Donc $g'(x) > 0$ si $x < 1$, $g'(1) = 0$, et $g'(x) < 0$ si $x > 1$. Ainsi, g est croissante sur $]-\infty; 1]$, puis décroissante sur $[1;+\infty[$.

5. Sur $]-\infty; 0[$, la fonction g est strictement croissante. De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad g(0) = 1.$$

Par le TVI, il existe une unique solution de $g(x) = 0$ dans $]-\infty; 0[$.

6.

$$g(-1) = -e + 1 < 0, \qquad g(0) = 1 > 0.$$

Donc la solution α vérifie :

$$-1 < \alpha < 0.$$

Une valeur approchée est $\alpha \approx -0{,}567$.

Exercice 8 - Convexité et tangente

1.

$$\varphi'(x) = e^x - 1, \qquad \varphi''(x) = e^x.$$

2. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc :

$$\varphi''(x) > 0.$$

Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

3.

$$\varphi(0) = e^0 - 0 - 1 = 0, \qquad \varphi'(0) = e^0 - 1 = 0.$$

L'équation de la tangente en 0 est :

$$y = \varphi'(0)(x - 0) + \varphi(0) = 0.$$

4. Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Comme la tangente en 0 est $y = 0$, on a :

$$\varphi(x) \geq 0.$$

Donc :

$$e^x - x - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x \geq x + 1.$$

5. Résoudre $\varphi(x) = 0$ revient à résoudre $e^x = x + 1$. D'après l'inégalité précédente, $\varphi(x) \geq 0$. De plus, $\varphi(0) = 0$. Comme φ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$, l'unique solution est :

$$x = 0.$$

Exercice 9 - Lecture graphique et variations

La courbe correspond à la fonction

$$f(x) = 0{,}25(x + 2)(x - 1)(x - 3),$$

et la droite pointillée correspond à $y = 1$.

1. Le nombre de solutions de $f(x) = 1$ correspond au nombre d'intersections entre la courbe de f et la droite $y = 1$. Graphiquement, on lit **trois intersections**.
2. En lisant le graphique, on obtient approximativement :

$$x \approx -1{,}68, \qquad x \approx 0{,}36, \qquad x \approx 3{,}32.$$

3. Graphiquement, $f(x) - 1$ est positif lorsque la courbe est au-dessus de la droite $y = 1$, et négatif lorsqu'elle est en dessous. Avec les valeurs approchées précédentes :

$$f(x) - 1 < 0 \text{ sur } [-3; -1{,}68[,$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ sur }]-1{,}68; 0{,}36[,$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ sur }]0{,}36; 3{,}32[,$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ sur }]3{,}32; 4].$$

4. Une lecture graphique donne seulement des valeurs approchées et dépend de la précision du dessin. Une preuve algébrique permet de déterminer exactement le nombre de solutions et leur encadrement rigoureux.

Partie 4 : Intégrales et équations différentielles

Exercice 10 - Intégrale et intégration par parties

1. Sur $[1; e]$, on a $x \geq 1 > 0$ et $\ln x \geq 0$. Donc :

$$f(x) = x \ln x \geq 0.$$

2. On calcule :

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx.$$

On utilise une intégration par parties avec :

$$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Donc :

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx.$$

Ainsi :

$$I = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e.$$

Donc :

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. Comme $f(x) \geq 0$ sur $[1;e]$, l'intégrale I représente l'aire, en unités d'aire, comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites $x = 1$ et $x = e$.

4. $$J = \int_1^e (x \ln x - x + 1)\, dx.$$

   Par linéarité :

   $$J = I - \int_1^e x\, dx + \int_1^e 1\, dx.$$

   Or :

   $$\int_1^e x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2},$$

   et :

   $$\int_1^e 1\, dx = e - 1.$$

   Donc :

   $$J = \frac{e^2+1}{4} - \frac{e^2-1}{2} + e - 1.$$

   On met au même dénominateur :

   $$J = \frac{e^2 + 1 - 2e^2 + 2 + 4e - 4}{4} = \frac{-e^2 + 4e - 1}{4}.$$

Exercice 11 - Aire entre deux courbes

1. $$f(x) - g(x) = x^2 + 1 - (x+1) = x^2 - x = x(x-1).$$

   Sur $[0;2]$, le signe est :

   $$x(x-1) \leq 0 \text{ sur } [0;1], \qquad x(x-1) \geq 0 \text{ sur } [1;2].$$

   Donc $g \geq f$ sur $[0;1]$, puis $f \geq g$ sur $[1;2]$.

2. L'aire entre deux courbes se calcule en intégrant la différence positive :

   $$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx.$$

   Donc :

   $$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - x)\, dx.$$

3. $$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

   Puis :

   $$\int_1^2 (x^2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2.$$

   On calcule :

   $$\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}.$$

   Ainsi :

   $$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1.$$

L'aire exacte est 1 unité d'aire.

Exercice 12 - Équation différentielle

1. Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ici $a = 0{,}4$, donc :

$$y(x) = Ce^{0{,}4x}.$$

2. La condition $f(0) = 5$ donne :

$$Ce^0 = 5 \quad \Rightarrow \quad C = 5.$$

Donc :

$$f(x) = 5e^{0{,}4x}.$$

3.

$$f(3) = 5e^{0{,}4\times 3} = 5e^{1{,}2}.$$

4.

$$f(x) = 20 \quad \Longleftrightarrow \quad 5e^{0{,}4x} = 20.$$

Donc :

$$e^{0{,}4x} = 4.$$

En prenant le logarithme :

$$0{,}4x = \ln 4.$$

Ainsi :

$$x = \frac{\ln 4}{0{,}4} = 2{,}5 \ln 4.$$

Exercice 13 - Équation différentielle avec second membre

1. Pour la fonction constante $y = 3$, on a $y' = 0$. Or :

$$2y - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0.$$

Donc $y = 3$ est bien solution particulière.

2. On pose $z = y - 3$, donc $y = z + 3$ et $z' = y'$. Comme $y' = 2y - 6$,

$$z' = 2(z + 3) - 6 = 2z.$$

3. Les solutions de $z' = 2z$ sont :

$$z(x) = Ce^{2x}.$$

Comme $y = z + 3$, les solutions de l'équation initiale sont :

$$y(x) = 3 + Ce^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

4. La condition $y(0) = 5$ donne :

$$5 = 3 + Ce^0 = 3 + C.$$

Donc $C = 2$, et :

$$y(x) = 3 + 2e^{2x}.$$

5. Quand $x \to +\infty$, on a $e^{2x} \to +\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

Partie 5 : Géométrie dans l'espace

Exercice 14 - Plan, droite et projection orthogonale

On considère :

$$A(1;0;2), \quad B(3;1;0), \quad C(0;2;1), \quad D(2;3;4).$$

1.
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1;1-0;0-2) = (2;1;-2),$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1;2-0;1-2) = (-1;2;-1).$$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. En effet, il n'existe pas de réel k tel que :
$$(2;1;-2) = k(-1;2;-1).$$
Les points A, B, C ne sont donc pas alignés et définissent un plan.

3. On cherche un vecteur normal $\vec{n} = (a;b;c)$ tel que :
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$
Cela donne :
$$2a + b - 2c = 0, \qquad -a + 2b - c = 0.$$
Une solution est :
$$\vec{n} = (3;4;5).$$
Vérification :
$$3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times (-2) = 6 + 4 - 10 = 0,$$
$$3 \times (-1) + 4 \times 2 + 5 \times (-1) = -3 + 8 - 5 = 0.$$

4. Comme $A(1;0;2)$ appartient au plan et que $\vec{n} = (3;4;5)$ est normal au plan, on écrit :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$
Donc :
$$3(x-1) + 4(y-0) + 5(z-2) = 0.$$
On développe :
$$3x - 3 + 4y + 5z - 10 = 0.$$
Ainsi :
$$3x + 4y + 5z - 13 = 0.$$

5. La droite Δ, orthogonale au plan, a pour vecteur directeur le vecteur normal $\vec{n} = (3;4;5)$ et passe par $D(2;3;4)$.
Donc :
$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

6. On remplace les coordonnées de Δ dans l'équation du plan :
$$3(2+3t) + 4(3+4t) + 5(4+5t) - 13 = 0.$$
Donc :
$$6 + 9t + 12 + 16t + 20 + 25t - 13 = 0.$$
Ainsi :
$$25 + 50t = 0, \quad \text{donc} \quad t = -\frac{1}{2}.$$
On en déduit :
$$x = 2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$y = 3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$
$$z = 4 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$
Donc :
$$H\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right).$$

7. Comme Δ est la droite passant par D et orthogonale au plan (ABC), et comme $H \in (ABC)$, le point H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
8. $$\overrightarrow{DH} = H - D = \left(\frac{1}{2} - 2; 1 - 3; \frac{3}{2} - 4\right) = \left(-\frac{3}{2}; -2; -\frac{5}{2}\right).$$

   Donc :
   $$DH = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}.$$

   Ainsi :
   $$DH = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{9 + 16 + 25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

   La distance du point D au plan (ABC) est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 15 - Distance d'un point à un plan

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$2x - y + 2z - 5 = 0,$$
et $M(3; 1; 4)$.

1. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est :
   $$\vec{n} = (2; -1; 2).$$
2. La droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}$. Donc :
   $$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
3. On remplace dans l'équation du plan :
   $$2(3 + 2t) - (1 - t) + 2(4 + 2t) - 5 = 0.$$

   Donc :
   $$6 + 4t - 1 + t + 8 + 4t - 5 = 0,$$
   $$8 + 9t = 0.$$

   Ainsi :
   $$t = -\frac{8}{9}.$$

   On obtient alors :
   $$x = 3 + 2\left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{11}{9},$$
   $$y = 1 - \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{17}{9},$$
   $$z = 4 + 2\left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{20}{9}.$$

   Donc :
   $$H\left(\frac{11}{9}; \frac{17}{9}; \frac{20}{9}\right).$$
4. Comme $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$ avec $t = -\frac{8}{9}$,
   $$MH = \left|-\frac{8}{9}\right| \|\vec{n}\|.$$

   Or :
   $$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

   Donc :
   $$MH = \frac{8}{9} \times 3 = \frac{8}{3}.$$

5. La formule de distance d'un point $M(x_M; y_M; z_M)$ au plan $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M;\mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ici :

$$d(M;\mathcal{P}) = \frac{|2 \times 3 - 1 + 2 \times 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}.$$

Donc :

$$d(M;\mathcal{P}) = \frac{|6 - 1 + 8 - 5|}{3} = \frac{8}{3}.$$

On retrouve bien $MH = \frac{8}{3}$.

Partie 6 : Probabilités, loi binomiale et variables aléatoires

Exercice 16 - Probabilités conditionnelles

On a :

$$P(D) = 0{,}04, \quad P_D(T) = 0{,}96, \quad P_{\overline{D}}(T) = 0{,}05.$$

Donc :

$$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$

1. L'arbre pondéré est :

	T	$\overline{T}$
D	0,96	0,04
$\overline{D}$	0,05	0,95

avec la première séparation : $P(D) = 0{,}04$ et $P(\overline{D}) = 0{,}96$.

2. $$P(D \cap T) = P(D)P_D(T) = 0{,}04 \times 0{,}96 = 0{,}0384.$$

3. $$P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D})P_{\overline{D}}(T) = 0{,}96 \times 0{,}05 = 0{,}048.$$

4. Par la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T).$$

Donc :

$$P(T) = 0{,}0384 + 0{,}048 = 0{,}0864.$$

5. $$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0384}{0{,}0864} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444.$$

6. Sachant que le test est positif, la probabilité que la pièce soit réellement défectueuse est environ 0,444, soit 44,4%.

Exercice 17 - Loi binomiale

1. On répète 80 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : le composant est défectueux ou non. La probabilité de défaut est constante et vaut 0,03. Donc X suit une loi binomiale.

2. $$X \sim \mathcal{B}(80; 0{,}03).$$

3. $$P(X = 0) = \binom{80}{0}(0{,}03)^0(0{,}97)^{80} = 0{,}97^{80}.$$

Ainsi :

$$P(X = 0) \approx 0{,}087.$$

4.
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}97^{80} \approx 0{,}913.$$

5. Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Donc :
$$E(X) = 80 \times 0{,}03 = 2{,}4.$$
Cela signifie qu'en moyenne, sur 80 composants, on attend environ 2,4 composants défectueux.

6. À la calculatrice, on cherche le plus petit entier k tel que :
$$P(X \leq k) \geq 0{,}95.$$
On obtient :
$$P(X \leq 4) \approx 0{,}905 < 0{,}95,$$
mais :
$$P(X \leq 5) \approx 0{,}967 \geq 0{,}95.$$
Donc :
$$k = 5.$$

Exercice 18 - Variable aléatoire, espérance et variance

1. On vérifie que la somme des probabilités vaut 1 :
$$0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}15 = 1.$$
Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité.

2.
$$E(X) = 0 \times 0{,}10 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}30 + 3 \times 0{,}20 + 4 \times 0{,}15.$$
Donc :
$$E(X) = 0{,}25 + 0{,}60 + 0{,}60 + 0{,}60 = 2{,}05.$$

3.
$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}10 + 1^2 \times 0{,}25 + 2^2 \times 0{,}30 + 3^2 \times 0{,}20 + 4^2 \times 0{,}15.$$
Donc :
$$E(X^2) = 0{,}25 + 1{,}20 + 1{,}80 + 2{,}40 = 5{,}65.$$

4.
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$
Ainsi :
$$V(X) = 5{,}65 - 2{,}05^2 = 5{,}65 - 4{,}2025 = 1{,}4475.$$

5.
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}4475} \approx 1{,}203.$$

Exercice 19 - Combinatoire

1. Former un groupe de 5 élèves parmi 31, sans ordre, revient à choisir une combinaison :
$$\binom{31}{5}.$$

2. On retire les groupes dans lesquels Alice et Karim sont ensemble. Si Alice et Karim sont déjà choisis, il reste à choisir 3 élèves parmi les 29 autres :
$$\binom{29}{3}.$$
Donc le nombre de groupes possibles est :
$$\binom{31}{5} - \binom{29}{3}.$$

3. Pour chaque position du code, il y a 6 choix. Comme les répétitions sont autorisées :
$$6^4 = 1296.$$

4. Pour avoir exactement deux lettres A, on choisit d'abord les 2 positions occupées par A parmi 4 :

$$\binom{4}{2}.$$

Pour les deux autres positions, on choisit parmi les 5 lettres différentes de A, avec répétition autorisée. Donc :

$$\binom{4}{2} \times 5^2 = 6 \times 25 = 150.$$

5. Un code sans A utilise seulement les 5 lettres B, C, D, E, F. Avec répétition autorisée :

$$5^4 = 625.$$

6. Si les répétitions sont interdites, on choisit successivement 4 lettres distinctes parmi 6. Le nombre de codes est :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

Exercice 20 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On sait que :

$$E(X) = 1200, \qquad V(X) = 2500.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

1. L'événement $|X - 1200| \geq 100$ signifie que la durée de vie de la batterie s'écarte d'au moins 100 heures de la durée moyenne 1200 heures. Autrement dit :

$$X \leq 1100 \quad \text{ou} \quad X \geq 1300.$$

2. On prend $a = 100$. Alors :

$$P(|X - 1200| \geq 100) \leq \frac{2500}{100^2}.$$

Donc :

$$P(|X - 1200| \geq 100) \leq \frac{2500}{10000} = 0{,}25.$$

3. L'événement $1100 < X < 1300$ est le complémentaire de l'événement $|X - 1200| \geq 100$, sauf aux bornes. Dans le cadre de cette estimation, on écrit :

$$P(1100 < X < 1300) = P(|X - 1200| < 100).$$

Or :

$$P(|X - 1200| < 100) = 1 - P(|X - 1200| \geq 100).$$

Comme

$$P(|X - 1200| \geq 100) \leq 0{,}25,$$

on obtient :

$$P(1100 < X < 1300) \geq 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

On peut garantir qu'au moins 75% des batteries ont une durée de vie comprise entre 1100 et 1300 heures, au sens de cette minoration.

4. On note $p = P(1100 < X < 1300)$. D'après la question précédente, on sait que $p \geq 0{,}75$. Si l'on choisit un grand nombre n de batteries indépendamment, la fréquence F_n des batteries dont la durée de vie appartient à $]1100; 1300[$ devrait être proche de la probabilité p, d'après la loi des grands nombres.
Donc, pour un grand échantillon, on s'attend à observer une fréquence proche d'une valeur au moins égale à 0,75, même si l'inégalité ne donne qu'une borne minimale et non la valeur exacte de p.