

## Correction détaillée - Préparation Bac

### Terminale générale - spécialité mathématiques

**Méthode.** Les corrections détaillent la rédaction attendue : justification, calculs intermédiaires, conclusion encadrée et interprétation lorsque le contexte le demande.

## Correction des exercices

### Correction de l'exercice 1 – QCM argumenté

1. On a

$$f(x) = 4xe^{-x} = \frac{4x}{e^x}.$$

Or l'exponentielle domine les puissances en  $+\infty$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^x} = 0.$$

**Réponse**

L'affirmation est **vraie**.

2.

$$g(x) = e^x - x^2.$$

Alors :

$$g'(x) = e^x - 2x, \quad g''(x) = e^x - 2.$$

Or  $g''(x) < 0$  lorsque  $x < \ln(2)$ . La dérivée seconde n'est donc pas toujours positive.

**Réponse**

L'affirmation est **fausse** :  $g$  n'est pas convexe sur tout  $\mathbb{R}$ .

3. Si la suite converge vers une limite  $L$ , alors :

$$L = 0,8L + 3.$$

Donc :

$$0,2L = 3, \quad L = 15.$$

De plus, si l'on pose  $v_n = u_n - 15$ , alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 15 = 0,8u_n + 3 - 15 = 0,8(u_n - 15) = 0,8v_n.$$

Comme  $|0,8| < 1$ ,  $v_n \rightarrow 0$ , donc  $u_n \rightarrow 15$ .

**Réponse**

L'affirmation est **vraie**.

4. Une primitive de  $h(x) = x^2 + 1$  est :

$$H(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Donc :

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = H(2) - H(0) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

**Réponse**

L'affirmation est **vraie**.

5.

$$\varphi(x) = \ln(x) - x, \quad x > 0.$$

On dérive :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Comme  $x > 0$ , le signe de  $\varphi'(x)$  est celui de  $1-x$ . Ainsi,  $\varphi$  est croissante sur  $]0; 1]$  puis décroissante sur  $[1; +\infty[$ . Elle admet donc un maximum en  $x = 1$  :

$$\varphi(1) = \ln(1) - 1 = -1.$$

**Réponse**

L'affirmation est vraie.

**Correction de l'exercice 2 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale**

1. L'arbre pondéré est :

$$P(M) = 0,04, \quad P(\bar{M}) = 0,96.$$

Depuis  $M$  :

$$P_M(T) = 0,95, \quad P_M(\bar{T}) = 0,05.$$

Depuis  $\bar{M}$  :

$$P_{\bar{M}}(T) = 0,03, \quad P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,97.$$

2.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,04 \times 0,95 = 0,038.$$

$$P(M \cap T) = 0,038$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T).$$

Or :

$$P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T) = 0,96 \times 0,03 = 0,0288.$$

Donc :

$$P(T) = 0,038 + 0,0288 = 0,0668.$$

$$P(T) = 0,0668$$

4.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,038}{0,0668} \approx 0,569.$$

$$P_T(M) \approx 0,569$$

Cela signifie que, lorsqu'un test est positif, la probabilité que l'individu soit réellement malade est d'environ 56,9%.

5. On répète 120 tests indépendants. Chaque test a deux issues : positif ou non positif. La probabilité d'un test positif est constante et vaut  $P(T) = 0,0668$ . Donc :

$$X \sim \mathcal{B}(120; 0,0668).$$

6.

$$P(X = 0) = \binom{120}{0} (0,0668)^0 (1 - 0,0668)^{120} = 0,9332^{120}.$$

Numériquement :

$$P(X = 0) \approx 0,00025.$$

Donc, à  $10^{-3}$  près :

$$P(X = 0) \approx 0,000.$$

Puis :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,99975.$$

À  $10^{-3}$  près :

$$P(X \geq 1) \approx 1,000.$$

## Correction de l'exercice 3 – Suite récurrente et modèle d'évolution

1.

$$u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,28.$$

$$\boxed{u_1 = 1,28}$$

La superficie recouverte passe de 1 hectare à 1,28 hectare.

2.

$$f(x) - x = (-0,02x^2 + 1,3x) - x = -0,02x^2 + 0,3x.$$

En factorisant par  $x$  :

$$f(x) - x = x(0,3 - 0,02x).$$

3. Si  $x \in [0; 15]$ , alors  $x \geq 0$  et :

$$0,3 - 0,02x \geq 0,3 - 0,02 \times 15 = 0.$$

Donc :

$$x(0,3 - 0,02x) \geq 0.$$

Ainsi :

$$f(x) - x \geq 0, \quad \text{donc} \quad f(x) \geq x.$$

4. On montre par récurrence :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15.$$

**Initialisation.** On a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1,28$ . Donc :

$$1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 15.$$

**Hérédité.** Supposons :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15.$$

Comme  $f$  est croissante sur  $[0; 15]$ , on obtient :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Or  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ , donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus,  $u_{n+1} \in [0; 15]$ , donc d'après la question précédente :

$$f(u_{n+1}) \geq u_{n+1}.$$

Enfin :

$$f(15) = -0,02 \times 15^2 + 1,3 \times 15 = -4,5 + 19,5 = 15.$$

Comme  $f$  est croissante et  $u_{n+1} \leq 15$  :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(15) = 15.$$

La propriété est héréditaire.

**Conclusion.** Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 15.}$$

5. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 15. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge.6. Soit  $L$  sa limite. En passant à la limite dans :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n,$$

on obtient :

$$L = -0,02L^2 + 1,3L.$$

Donc :

$$0 = -0,02L^2 + 0,3L = L(-0,02L + 0,3).$$

Ainsi :

$$L = 0 \quad \text{ou} \quad L = 15.$$

Comme  $u_n \geq 1$ , la limite ne peut pas être 0. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15}$$

7. L'algorithme complété est :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u < 10:
        n = n + 1
        u = -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

### Correction de l'exercice 4 – Fonction logarithme et TVI

1. La fonction  $x \mapsto x - 2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $x \mapsto \ln(x)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

2.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

3. Comme  $x > 0$ , on a  $\frac{1}{x} > 0$ , donc :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . De plus, ses limites aux bornes de l'intervalle sont  $-\infty$  et  $+\infty$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

6.

$$f(1) = 1 - 2 + \ln(1) = -1 < 0.$$

Et :

$$f(2) = 2 - 2 + \ln(2) = \ln(2) > 0.$$

Comme  $f$  est continue, l'unique solution  $\alpha$  vérifie :

$$\boxed{1 < \alpha < 2}.$$

7. Comme  $f$  est strictement croissante et s'annule en  $\alpha$  :

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur } ]0; \alpha[}, \quad \boxed{f(\alpha) = 0}, \quad \boxed{f(x) > 0 \text{ sur } ]\alpha; +\infty[}.$$

### Correction de l'exercice 5 – Exponentielle, convexité et tangente

1.

$$g'(x) = e^x - 1.$$

Puis :

$$g''(x) = e^x.$$

2. Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ . Donc :

$$g''(x) > 0.$$

Ainsi,  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

3. L'équation de la tangente à la courbe de  $g$  au point d'abscisse  $a$  est :

$$y = g'(a)(x - a) + g(a).$$

Pour  $a = 0$  :

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0, \quad g'(0) = e^0 - 1 = 0.$$

Donc la tangente est :

$$\boxed{y = 0}.$$

4. Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Donc la courbe de  $g$  est au-dessus de sa tangente en 0 :

$$g(x) \geq 0.$$

Donc :

$$e^x - x - 1 \geq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1}.$$

5. D'après la question précédente :

$$g(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

De plus,  $g(0) = 0$ . Donc  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et s'annule seulement en 0.

6.

$$g(x) = 0 \iff e^x - x - 1 = 0.$$

D'après le signe précédent, l'unique solution est :

$$\boxed{x = 0}.$$

### Correction de l'exercice 6 – Intégrales et intégration par parties

1. Sur  $[1; e]$ , on a  $x \geq 1 > 0$  et  $\ln(x) \geq 0$ . Donc :

$$f(x) = x \ln(x) \geq 0.$$

2. On pose :

$$u(x) = \ln(x), \quad v'(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Par intégration par parties :

$$I = \int_1^e x \ln(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Donc :

$$I = \frac{e^2}{2} \ln(e) - \frac{1}{2} \ln(1) - \int_1^e \frac{x}{2} dx.$$

Comme  $\ln(e) = 1$  et  $\ln(1) = 0$  :

$$I = \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^e.$$

Donc :

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\boxed{I = \frac{e^2 + 1}{4}}$$

3. Comme  $f(x) \geq 0$  sur  $[1; e]$ , l'intégrale  $I$  représente l'aire située entre la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites  $x = 1$  et  $x = e$ .

4.

$$J = \int_1^e (x \ln(x) - x + 1) dx.$$

Par linéarité :

$$J = I - \int_1^e x dx + \int_1^e 1 dx.$$

Or :

$$\int_1^e x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2},$$

et :

$$\int_1^e 1 dx = e - 1.$$

Donc :

$$J = \frac{e^2 + 1}{4} - \frac{e^2 - 1}{2} + e - 1.$$

Avec le même dénominateur :

$$J = \frac{e^2 + 1 - 2e^2 + 2 + 4e - 4}{4} = \frac{-e^2 + 4e - 1}{4}.$$

$$J = \frac{-e^2 + 4e - 1}{4}$$

## Correction de l'exercice 7 – Géométrie dans l'espace

1.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 0 - 1; 1 - 1) = (2; -1; 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 1; 3 - 1; 0 - 1) = (0; 2; -1).$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (0; 2; -1)$$

2. Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires. En effet, la première coordonnée de  $\overrightarrow{AC}$  vaut 0 alors que celle de  $\overrightarrow{AB}$  vaut 2. Il n'existe donc pas de réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ . Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont donc pas alignés.

3. On calcule les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (1; 2; 4) \cdot (2; -1; 0) = 2 - 2 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (1; 2; 4) \cdot (0; 2; -1) = 0 + 4 - 4 = 0.$$

Donc  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Ainsi :

$$\vec{n} = (1; 2; 4) \text{ est normal au plan } (ABC).$$

4. Un plan de vecteur normal  $(1; 2; 4)$  admet une équation de la forme :

$$x + 2y + 4z + d = 0.$$

Comme  $A(1; 1; 1)$  appartient au plan :

$$1 + 2 \times 1 + 4 \times 1 + d = 0.$$

Donc :

$$7 + d = 0, \quad d = -7.$$

Une équation du plan est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

5. La droite  $\Delta$  passe par  $D(4; 3; 2)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{n} = (1; 2; 4)$ . Donc :

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

6. Le point  $H$  appartient à  $\Delta$ , donc :

$$H(4 + t; 3 + 2t; 2 + 4t).$$

Comme  $H$  appartient au plan :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

On remplace :

$$(4 + t) + 2(3 + 2t) + 4(2 + 4t) - 7 = 0.$$

$$4 + t + 6 + 4t + 8 + 16t - 7 = 0.$$

$$11 + 21t = 0.$$

Donc :

$$t = -\frac{11}{21}.$$

Ainsi :

$$x_H = 4 - \frac{11}{21} = \frac{73}{21},$$

$$y_H = 3 + 2\left(-\frac{11}{21}\right) = \frac{41}{21},$$

$$z_H = 2 + 4\left(-\frac{11}{21}\right) = -\frac{2}{21}.$$

Donc :

$$\boxed{H\left(\frac{73}{21}; \frac{41}{21}; -\frac{2}{21}\right)}.$$

7. La droite  $\Delta$  est orthogonale au plan  $(ABC)$  et passe par  $D$ . Le point  $H$  est son intersection avec le plan. Donc  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

### Correction de l'exercice 8 – Équation différentielle avec second membre

1. Si  $y = 6$ , alors  $y' = 0$ . Le membre de droite vaut :

$$0,5 \times 6 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Donc  $y = 6$  est bien solution particulière.

2. On pose  $z = y - 6$ . Alors :

$$z' = y'.$$

Comme  $y' = 0,5y - 3$  et  $y = z + 6$ , on obtient :

$$z' = 0,5(z + 6) - 3 = 0,5z + 3 - 3 = 0,5z.$$

3. Les solutions de  $z' = 0,5z$  sont :

$$z(x) = Ce^{0,5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme  $z = y - 6$ , on a :

$$y(x) = 6 + Ce^{0,5x}.$$

Donc les solutions sont :

$$\boxed{y(x) = 6 + Ce^{0,5x}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

4. On veut  $f(0) = 10$ . Or :

$$f(0) = 6 + Ce^0 = 6 + C.$$

Donc :

$$6 + C = 10, \quad C = 4.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = 6 + 4e^{0,5x}}.$$

5. Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $e^{0,5x} \rightarrow +\infty$ . Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

**Correction de l'exercice 9 – Variable aléatoire**

1. Toutes les probabilités sont positives et :

$$0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,20 + 0,15 = 1.$$

Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité.

- 2.

$$E(X) = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,20 + 4 \times 0,15.$$

$$E(X) = 0 + 0,25 + 0,60 + 0,60 + 0,60 = 2,05.$$

$$E(X) = 2,05$$

- 3.

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,10 + 1^2 \times 0,25 + 2^2 \times 0,30 + 3^2 \times 0,20 + 4^2 \times 0,15.$$

$$E(X^2) = 0 + 0,25 + 1,20 + 1,80 + 2,40 = 5,65.$$

$$E(X^2) = 5,65$$

- 4.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$V(X) = 5,65 - (2,05)^2 = 5,65 - 4,2025 = 1,4475.$$

$$V(X) = 1,4475$$

- 5.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,4475} \approx 1,203.$$

$$\sigma(X) \approx 1,203$$

6. Si  $X$  représente un gain en euros, alors le gain moyen sur un grand nombre de parties est de :

$$2,05 \text{ euros}.$$

**Correction de l'exercice 10 – Dénombrement et combinatoire**

1. Former un groupe de 5 élèves parmi 31 sans ordre revient à choisir une combinaison :

$$\binom{31}{5} = 169911.$$

$$169911$$

2. On compte d'abord tous les groupes, puis on retire ceux qui contiennent à la fois Alice et Sami.

$$\binom{31}{5} = 169911.$$

Si Alice et Sami sont imposés, il reste à choisir 3 élèves parmi les 29 autres :

$$\binom{29}{3} = 3654.$$

Donc le nombre de groupes autorisés est :

$$\binom{31}{5} - \binom{29}{3} = 169911 - 3654 = 166257.$$

$$166257$$

3. Chaque position du code peut être remplie de 6 façons, et il y a 4 positions. Donc :

$$6^4 = 1296.$$

$$1296$$

4. Pour avoir exactement deux fois la lettre  $A$ , on choisit d'abord les 2 positions occupées par  $A$  :

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Les deux autres positions sont choisies parmi les 5 lettres différentes de  $A$ . Donc :

$$\binom{4}{2} \times 5^2 = 6 \times 25 = 150.$$

150

5. Pour ne pas contenir  $A$ , chaque position peut être choisie parmi les 5 autres lettres. Donc :

$$5^4 = 625.$$

625