# Mini fiche de révision

## Bac – Terminale spécialité mathématiques

Fiche complète : suites, limites, dérivées, primitives, intégrales, probabilités, combinatoire, algorithmique et géométrie dans l'espace

### 1. Suites numériques

Une suite est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{N}$. Elle peut commencer à $u_0$, $u_1$ ou à un autre rang.
**Suite explicite :**

$$u_n = f(n)$$

**Suite par récurrence :**

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné,} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

**Étude d'une suite par récurrence :**

1. Montrer que l'intervalle choisi est stable.
2. Étudier le sens de variation de $(u_n)$.
3. Montrer que la suite est bornée.
4. Utiliser le théorème de convergence monotone.
5. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $f$ est continue, alors la limite $\ell$ vérifie :

$$\ell = f(\ell).$$

### 2. Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)$ est arithmétique si on ajoute toujours le même nombre $r$.

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre $r$ est la raison.
**Formules :**

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

**Somme des termes consécutifs :**

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$

### 3. Suites géométriques

Une suite $(u_n)$ est géométrique si on multiplie toujours par le même nombre $q$.

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre $q$ est la raison.
**Formules :**

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$$

**Somme des termes consécutifs, si $q \neq 1$ :**

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

**Cas particulier :**

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

## 4. Limites de suites

**Limites usuelles :**

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad \text{si} \ -1 < q < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \quad \text{si } q > 1$$

**Convergence monotone :**

$$\boxed{\text{croissante et majorée} \implies \text{convergente}}$$

$$\boxed{\text{décroissante et minorée} \implies \text{convergente}}$$

Attention : le théorème donne l'existence de la limite, mais pas directement sa valeur.

## 5. Limites de fonctions

**Limites usuelles :**

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

**Croissances comparées, pour $n > 0$ :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Donc l'exponentielle domine les puissances, et le logarithme croît plus lentement que les puissances.

## 6. Asymptotes

**Asymptote horizontale :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \implies \quad y = \ell$$

**Asymptote verticale :**

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale.
**Asymptote oblique :**

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \quad \implies \quad y = ax + b$$

## 7. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Une fonction continue sur un intervalle ne présente pas de rupture sur cet intervalle.
Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine :

$$x^n, \quad e^x, \quad \ln x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

Attention : $\ln x$ est continue seulement sur $]0; +\infty[$.
**Théorème des valeurs intermédiaires :** Si $f$ est continue sur $[a; b]$, alors pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que :

$$f(c) = k.$$

**Existence et unicité :** Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, et si $k$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a; b]$.

## 8. Dérivées usuelles et composées – version compacte

**Nombre dérivé :** $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente. **Tangente :** $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

**Dérivées usuelles :**

| f(x) | Cond. | f'(x) |
|---|---|---|
| $k$ | | $0$ |
| $x$ | | $1$ |
| $x^n$ | $n \in \mathbb{Z}$, domaine adapté | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $x > 0$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $e^x$ | | $e^x$ |
| $\ln x$ | $x > 0$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | | $\cos x$ |
| $\cos x$ | | $-\sin x$ |

**Dérivées de fonctions composées :**

| f(x) | Cond. | f'(x) |
|---|---|---|
| $u^n$ | $n \in \mathbb{Z},\ u \neq 0$ si $n < 0$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $u \neq 0$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $u > 0$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $e^u$ | $u$ dérivable | $u'e^u$ |
| $\ln u$ | $u > 0$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\sin u$ | $u$ dérivable | $u' \cos u$ |
| $\cos u$ | $u$ dérivable | $-u' \sin u$ |

**Opérations :**

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (ku)' = ku', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0).$$

**Méthode composée :** repérer la fonction intérieure $u(x)$, puis multiplier par $u'(x)$.

## 9. Variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction $f$, on étudie le signe de sa dérivée $f'(x)$ sur un intervalle.

$$f'(x) > 0 \text{ sur } I \Longrightarrow f \text{ est strictement croissante sur } I$$

$$f'(x) < 0 \text{ sur } I \Longrightarrow f \text{ est strictement décroissante sur } I$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \text{point critique possible}$$

**Méthode :**

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$ si possible.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Construire le tableau de variations.
5. Calculer les valeurs importantes.

**Exemple :**

$$f(x) = (x-2)e^x$$

Alors :

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = e^x(x-1)$$

Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de $x - 1$. Donc $f$ est décroissante sur $]-\infty; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$.

## 10. Convexité

Si $f$ est deux fois dérivable sur un intervalle $I$ :

$$f''(x) \geq 0 \Longrightarrow f \text{ est convexe sur } I$$

$$f''(x) \leq 0 \Longrightarrow f \text{ est concave sur } I$$

Un point d'inflexion correspond généralement à un changement de signe de $f''$.

**Position courbe–tangente :**

— si $f$ est convexe, la courbe est au-dessus de ses tangentes ;

— si $f$ est concave, la courbe est au-dessous de ses tangentes.

## 11. Fonction exponentielle

La fonction exponentielle vérifie :

$$(e^x)' = e^x$$

Elle est toujours strictement positive :

$$e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Propriétés :**

$$e^{a+b} = e^a e^b, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

**Exponentielle composée :**

$$f(x) = e^{u(x)} \Longrightarrow f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

## 12. Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie sur :

$$]0; +\infty[$$

Elle est la fonction réciproque de l'exponentielle.

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x \quad \text{pour } x > 0$$

**Propriétés, pour $a > 0$ et $b > 0$ :**

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln(a^r) = r \ln a \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } r \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1$$

**Attention :**

$$\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$$

## 13. Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{-1 \leq \sin x \leq 1} \qquad \boxed{-1 \leq \cos x \leq 1}$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

**Dérivées :**

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \qquad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

**Primitives :**

$$\boxed{\int \cos x \, dx = \sin x + C} \qquad \boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x + C}$$

## 14. Primitives usuelles et composées – version compacte

Une fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle $I$ si $F'(x) = f(x)$.

**Primitives usuelles :**

| **f(x)** | **Cond.** | **F(x)** |
|---|---|---|
| $0$ | | $C$ |
| $1$ | | $x + C$ |
| $k$ | | $kx + C$ |
| $x^n$ | $n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $x > 0$ | $\ln x + C$ |
| $e^x$ | | $e^x + C$ |
| $\cos x$ | | $\sin x + C$ |
| $\sin x$ | | $-\cos x + C$ |

**Primitives de fonctions composées :**

| **Forme de f(x)** | **Cond.** | **F(x)** |
|---|---|---|
| $u'u^n$ | $n \neq -1$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $u > 0$ | $\ln u + C$ |
| $u'e^u$ | | $e^u + C$ |
| $u' \cos u$ | | $\sin u + C$ |
| $u' \sin u$ | | $-\cos u + C$ |

**Attention :** pour une primitive composée, il faut reconnaître une forme avec $u'(x)$ déjà présente. Exemple :

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{u'}{u} \quad \text{avec } u = x^2 + 1, \qquad F(x) = \ln(x^2 + 1) + C.$$

### 15. Intégrales

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a;b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire sous la courbe.
Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$, l'intégrale est négative et l'aire vaut :

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $f$ change de signe sur $[a;b]$, on découpe l'intervalle selon les changements de signe pour calculer l'aire totale.
**Valeur moyenne :**

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

### 16. Équations différentielles

**Équation $y' = ay$ :**

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax}}$$

**Équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ :** Une solution constante $k$ vérifie :

$$0 = ak + b$$

Donc :

$$k = -\frac{b}{a}$$

La solution générale est :

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$$

Si $a = 0$, alors $y' = b$ et donc :

$$y = bx + C.$$

### 17. Probabilités – Formules essentielles

Soit $A$ un événement.
**Probabilité contraire :**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

**Réunion et intersection :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Événements incompatibles :** Si $A \cap B = \varnothing$, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Probabilité conditionnelle :** Si $P(A) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

### 18. Probabilités totales, Bayes et indépendance

Si $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, alors :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Donc :

$$\boxed{P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$

**Formule de Bayes, si $P(B) \neq 0$ :**

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}}$$

**Indépendance :** Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

ou encore, si $P(A) \neq 0$ :

$$P_A(B) = P(B).$$

### 19. Arbre pondéré – Exemple expliqué

Dans un groupe de préparation au bac, 60% des élèves ont fait au moins trois sujets blancs. Parmi eux, $\frac{5}{6}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12. Parmi les autres élèves, $\frac{1}{4}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12.
On note :

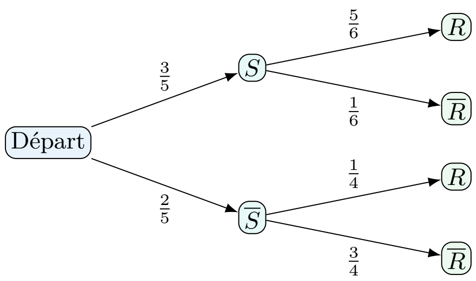
$S$ : l'élève a fait au moins trois sujets blancs

$R$ : l'élève obtient une note supérieure ou égale à 12

On a donc :

$$P(S) = 0{,}60 = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{S}) = 0{,}40 = \frac{2}{5}$$

$$P_S(R) = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{S}}(R) = \frac{1}{4}$$




**Règle importante :** la probabilité d'un chemin se calcule en multipliant les probabilités des branches.

$$P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

$$P(\overline{S} \cap R) = P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}10$$

Donc :

$$P(R) = 0{,}50 + 0{,}10 = 0{,}60.$$

### 20. Combinatoire et dénombrement

Pour compter le nombre de façons de choisir $k$ éléments parmi $n$, on utilise le coefficient binomial :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad 0 \leq k \leq n.$$

**Propriétés utiles :**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

**Lien avec le binôme de Newton :**

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Cette formule explique l'apparition de $\binom{n}{k}$ dans la loi binomiale.

## 21. Loi binomiale

Une expérience de Bernoulli a deux issues : succès de probabilité $p$ et échec de probabilité $1-p$.
**Conditions :**

$$n \in \mathbb{N}, \qquad p \in [0;1]$$

On répète $n$ fois l'expérience de manière indépendante. La variable $X$ compte le nombre de succès :

$$X \sim \mathcal{B}(n;p)$$

Pour $k \in \{0;1;\ldots;n\}$ :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

**Espérance, variance et écart-type :**

$$\boxed{E(X) = np} \qquad \boxed{V(X) = np(1-p)} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

## 22. Variables aléatoires et opérations

Si $X$ prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)}$$

L'espérance représente la moyenne théorique.
**Variance et écart-type :**

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

**Linéarité de l'espérance :**

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b} \qquad \boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

**Variance d'une transformation affine :**

$$\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)}$$

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

## 23. Concentration et loi des grands nombres

**Idée essentielle :** plus le nombre de répétitions est grand, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité théorique.
Si une variable aléatoire $X$ possède une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev

donne, pour $a > 0$ :

$$\boxed{P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}}$$

Pour une fréquence $F_n$ obtenue sur $n$ répétitions indépendantes d'une expérience de probabilité $p$, on a l'idée suivante :

$$F_n \approx p \quad \text{quand } n \text{ est grand.}$$

## 24. Géométrie dans l'espace – Vecteurs

Soient deux points :

$$A(x_A; y_A; z_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B; y_B; z_B)$$

Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Donc :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

## 25. Produit scalaire dans l'espace

Soient :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire est :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Les vecteurs sont orthogonaux si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0}$$

## 26. Droite dans l'espace

Soit une droite $d$ passant par :

$$A(x_A; y_A; z_A)$$

et de vecteur directeur :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient à $d$ si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = t\vec{u}} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Or :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad t\vec{u} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de la droite est :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + ta, \\ y = y_A + tb, \\ z = z_A + tc, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

## 27. Plan dans l'espace

Soit un plan $P$ passant par :

$$A(x_A; y_A; z_A)$$

et de vecteur normal :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan $P$ si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0}$$

Or :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

En développant :

$$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$$

On obtient une équation cartésienne du plan :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

avec :

$$\boxed{d = -(ax_A + by_A + cz_A)}$$

## 28. Distance d'un point à un plan – Formule démontrée

Attention : la formule de distance d'un point à un plan doit être démontrée ou donnée dans l'énoncé.
Soit le plan :

$$P : ax + by + cz + d = 0$$

et le point :

$$A(x_A; y_A; z_A)$$

Un vecteur normal au plan est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On note $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur le plan $P$.
Comme $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$$

Donc :

$$H(x_A + ta; y_A + tb; z_A + tc)$$

Comme $H \in P$, ses coordonnées vérifient :

$$a(x_A + ta) + b(y_A + tb) + c(z_A + tc) + d = 0$$

Donc :

$$ax_A + by_A + cz_A + d + t(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

Ainsi :

$$t = -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Or :

$$AH = |t|\|\vec{n}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Finalement :

$$\boxed{d(A;P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

## 29. Méthode Bac – Étudier une fonction

Pour étudier une fonction, on suit généralement ce plan :

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine.
3. Calculer la dérivée.
4. Étudier le signe de la dérivée.
5. Construire le tableau de variations.
6. Résoudre les équations demandées.
7. Étudier les asymptotes si nécessaire.
8. Interpréter graphiquement.

**Attention aux conditions :**

$$\ln u \Longrightarrow u > 0$$

$$\frac{u}{v} \Longrightarrow v \neq 0$$

## 30. Méthode Bac – Récurrence

Pour démontrer une propriété $P_n$ par récurrence :
**1. Initialisation :** on vérifie la propriété au premier rang.

$$P_0 \text{ est vraie}$$

**2. Hérédité :** on suppose que $P_n$ est vraie pour un certain rang $n$, puis on démontre que $P_{n+1}$ est vraie.
**3. Conclusion :** par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n$ du domaine.

### 31. Erreurs fréquentes à éviter

- Ne jamais écrire :
$$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$$
- Toujours vérifier le domaine de définition de $\ln u$ :
$$u > 0$$
- Ne pas confondre :
$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad \text{et non} \qquad e^a + e^b$$
- Une suite croissante n'est pas forcément convergente. Il faut aussi qu'elle soit majorée.
- Ne pas oublier la constante dans une primitive :
$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

### 32. Algorithmique et Python – méthodes Bac

L'algorithmique sert surtout à étudier des suites, chercher un seuil ou simuler une expérience aléatoire.

**Boucle for : nombre d'étapes connu**

```
u = 2
for n in range(10):
    u = 0.5*u + 3
print(u)
```

Cette boucle calcule les 10 premiers passages de la relation de récurrence.

**Simulation d'une fréquence :**

```
from random import random
succes = 0
for i in range(1000):
    if random() < 0.3:
        succes = succes + 1
print(succes/1000)
```

**Boucle while : seuil à atteindre**

```
u = 2
n = 0
while u < 5.9:
    u = 0.5*u + 3
    n = n + 1
print(n)
```

Cette boucle cherche le premier rang où la condition est vérifiée.

### 33. Tableau synthèse – Dérivées et primitives

| **Fonction / forme** | Dérivée | Primitive importante |
|---|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\ln x + C$, sur $]0;+\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$, $x > 0$ | Pas de primitive usuelle exigible directement |
| $e^{u(x)}$ | $u'e^u$ | Si $f = u'e^u$, alors $F = e^u + C$ |
| $\ln(u(x))$ | $\dfrac{u'}{u}$, $u > 0$ | Si $f = \dfrac{u'}{u}$, alors $F = \ln(u) + C$ |
| $u(x)^n$ | $nu'u^{n-1}$ | Si $f = u'u^n$, alors $F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ |

### 34. Tableau final des formules à retenir – Partie 1

| **Thème** | Formule importante |
|---|---|
| **Suite arithmétique** | $u_n = u_p + (n-p)r$ |
| **Suite géométrique** | $u_n = u_p q^{n-p}$ |
| **Coefficient binomial** | $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ |
| **Somme géométrique** | $u_p + \cdots + u_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ |
| **Tangente** | $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ |
| **Quotient** | $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| **Exponentielle composée** | $(e^u)' = u'e^u$ |
| **Logarithme composé** | $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$ |
| **Intégrale** | $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ |
| **Valeur moyenne** | $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ |
| **Trigonométrie** | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ |

### 35. Tableau final des formules à retenir – Partie 2

| **Thème** | Formule importante |
|---|---|
| **Probabilité conditionnelle** | $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ |
| **Probabilités totales** | $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$ |
| **Bayes** | $P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$ |
| **Loi binomiale** | $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ |
| **Espérance binomiale** | $E(X) = np$ |
| **Variables aléatoires** | $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ; si indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ |
| **Concentration** | $P(\lvert X - E(X)\rvert \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$ |
| **Vecteur espace** | $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ |
| **Produit scalaire** | $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ |
| **Droite espace** | $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ |
| **Plan espace** | $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ |
| **Distance point-plan** | $d(A; P) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ après démonstration |

**Conseil révision :** apprendre les formules, puis refaire des exercices type Bac sans regarder la correction.