SUJET 1 CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Épreuve anticipée de mathématiques – Première STI2D

QCM et deuxième partie

Réponses du QCM : 1B 2B 3B 4A 5C 6B 7A 8A 9A.

Exercice Correction du QCM 6 points

Question 1. Augmenter de 12 % revient à multiplier par :

$$1 + \frac{12}{100} = 1{,}12.$$

La bonne réponse est donc **B**.

Question 2. On utilise la règle sur les puissances de 10 :

$$10^3 \times 10^5 = 10^{3+5} = 10^8.$$

La bonne réponse est donc **B**.

Question 3. On résout l'équation :

$$4x - 20 = 0 \iff 4x = 20 \iff x = 5.$$

La bonne réponse est donc **B**.

Question 4. On calcule l'image de 4 :

$$f(4) = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10.$$

La bonne réponse est donc **A**.

Question 5. Diminuer de 30 % revient à multiplier par :

$$1 - \frac{30}{100} = 0{,}70.$$

La bonne réponse est donc **C**.

Question 6. On écrit 72000 sous la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$:

$$72000 = 7{,}2 \times 10^4.$$

La bonne réponse est donc **B**.

Question 7. On développe :

$$(x+4)^2 - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16.$$

La bonne réponse est donc **A**.

Question 8. Les racines du produit $(x-3)(x+2)$ sont :

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = -2.$$

Le coefficient dominant du produit est positif. Le signe est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La bonne réponse est donc **A**.

Question 9. La droite passe par $(0;18)$, donc son ordonnée à l'origine est 18.

Le coefficient directeur vaut :

$$a = \frac{0-18}{3-0} = \frac{-18}{3} = -6.$$

Ainsi :

$$f(x) = -6x + 18.$$

La bonne réponse est donc **A**.

Corrigé détaillé de la deuxième partie

Exercice 1 4 points

Chaque année, la production augmente de 8 %. Le coefficient multiplicateur associé est :

$$1 + \frac{8}{100} = 1{,}08.$$

1. Calcul de u_1.

$$u_1 = 1200 \times 1{,}08 = 1296.$$

Donc :

$$\boxed{u_1 = 1296}.$$

2. Nature de la suite.

Chaque année, la production est multipliée par 1,08. Ainsi :

$$u_{n+1} = 1{,}08u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite **géométrique** de raison :

$$\boxed{q = 1{,}08}.$$

3. Expression de u_n en fonction de n.

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Ici, $u_0 = 1200$ et $q = 1{,}08$, donc :

$$\boxed{u_n = 1200 \times 1{,}08^n}.$$

4. Production en 2030.

De 2026 à 2030, il y a 4 années. On calcule donc u_4 :

$$u_4 = 1200 \times 1{,}08^4.$$

Or :

$$1200 \times 1{,}08^4 = 1632{,}586752.$$

La production doit être donnée en nombre entier de batteries. On obtient donc environ :

$$\boxed{1633 \text{ batteries}}.$$

La production augmente de manière multiplicative : ce n'est pas une suite arithmétique, mais une suite géométrique.

Exercice 2 5 points

On considère la fonction :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5.$$

1. Calcul de $f'(x)$.

On dérive terme à terme :

$$(x^3)' = 3x^2, \qquad (-9x^2)' = -18x, \qquad (24x)' = 24, \qquad 5' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 18x + 24}.$$

2. Factorisation de $f'(x)$.

On factorise par 3 :

$$f'(x) = 3(x^2 - 6x + 8).$$

Or :

$$(x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8.$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = 3(x-2)(x-4)}.$$

3. Signe de $f'(x)$ sur $[0; 6]$.

Les valeurs qui annulent $f'(x)$ sont 2 et 4. Comme le facteur 3 est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui du produit $(x-2)(x-4)$.

x	0		2		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$f'(x) > 0 \text{ sur } [0; 2[, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]2; 4[, \quad f'(x) > 0 \text{ sur }]4; 6].$$

4. Tableau de variations de f.

On calcule d'abord les valeurs utiles :

$$f(0) = 5,$$
$$f(2) = 2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2 + 5 = 8 - 36 + 48 + 5 = 25,$$
$$f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4 + 5 = 64 - 144 + 96 + 5 = 21,$$
$$f(6) = 6^3 - 9 \times 6^2 + 24 \times 6 + 5 = 216 - 324 + 144 + 5 = 41.$$

Comme $f'(x)$ est positif, puis négatif, puis positif, la fonction f est croissante sur $[0; 2]$, décroissante sur $[2; 4]$, puis croissante sur $[4; 6]$.

x	0		2		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	5	$\nearrow$	25	$\searrow$	21	$\nearrow$	41

5. Valeurs demandées.

On a donc :

$$\boxed{f(0) = 5, \quad f(2) = 25, \quad f(4) = 21, \quad f(6) = 41}.$$

Le maximum local sur $[0; 6]$ est atteint en $x = 2$ et vaut 25. Le minimum local est atteint en $x = 4$ et vaut 21.

Exercice 3 5 points

On dispose des données suivantes :

$$P(A) = 0{,}60, \qquad P(B) = 0{,}40, \qquad P_A(D) = 0{,}03, \qquad P_B(D) = 0{,}05.$$

1. Probabilités données.

La machine A produit 60 % des pièces, donc :

$$\boxed{P(A) = 0{,}60}.$$

La machine B produit 40 % des pièces, donc :

$$\boxed{P(B) = 0{,}40}.$$

Parmi les pièces produites par A, 3 % sont défectueuses, donc :

$$\boxed{P_A(D) = 0{,}03}.$$

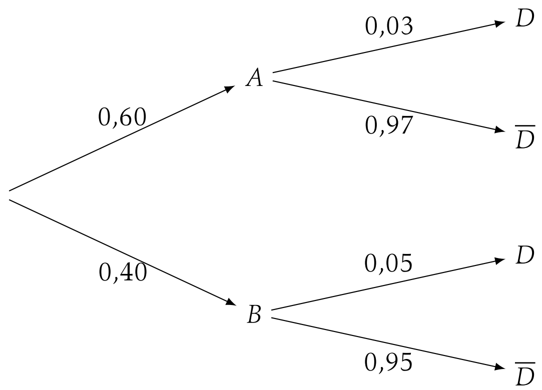
Parmi les pièces produites par B, 5 % sont défectueuses, donc :

$$\boxed{P_B(D) = 0{,}05}.$$

2. Arbre pondéré.

Les probabilités complémentaires sont :

$$P_A(\overline{D}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97, \qquad P_B(\overline{D}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$



3. Calcul de $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

Pour obtenir la probabilité d'un chemin dans un arbre pondéré, on multiplie les probabilités écrites sur les branches du chemin.

Ainsi :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}60 \times 0{,}03 = 0{,}018.$$

Donc :

$$\boxed{P(A \cap D) = 0{,}018}.$$

De même :

$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}020.$$

Donc :

$$\boxed{P(B \cap D) = 0{,}020}.$$

4. Calcul de $P(D)$.

L'évènement D peut se produire de deux manières incompatibles :

— la pièce vient de A et elle est défectueuse ;

— la pièce vient de B et elle est défectueuse.

Par la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D).$$

Donc :

$$P(D) = 0{,}018 + 0{,}020 = 0{,}038.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(D) = 0{,}038}.$$

5. Probabilité que la pièce provienne de A sachant qu'elle est défectueuse.

On cherche la probabilité conditionnelle $P_D(A)$:

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}.$$

Ainsi :

$$P_D(A) = \frac{0{,}018}{0{,}038} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 0{,}474.$$

Donc :

$$\boxed{P_D(A) \approx 0{,}474}.$$

Sachant que la pièce est défectueuse, la probabilité qu'elle provienne de la machine A est d'environ 47,4 %.