# Correction détaillée – Sujet 4

**1$^{\text{re}}$ générale spécialité mathématiques**

## Première partie – Automatismes / QCM

### Correction – QCM

**Question 1.** On sait que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}35 \times 0{,}8 = 0{,}28.$$

Réponse correcte : **A**.

**Question 2.** On cherche le nombre total $N$ d'élèves. On sait que :

$$\frac{7}{8}N = 168.$$

Donc :

$$N = 168 \times \frac{8}{7} = 24 \times 8 = 192.$$

Réponse correcte : **C**.

**Question 3.** On calcule :

$$\frac{A}{B} + 1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} + 1.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

Donc :

$$\frac{A}{B} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Réponse correcte : **A**.

**Question 4.** Une augmentation de 30% correspond à un coefficient multiplicateur :

$$1 + \frac{30}{100} = 1{,}3.$$

Une baisse de 20% correspond à un coefficient multiplicateur :

$$1 - \frac{20}{100} = 0{,}8.$$

Le coefficient global est donc :

$$1{,}3 \times 0{,}8 = 1{,}04.$$

Cela correspond à une hausse de 4%.

Réponse correcte : **A**.

**Question 5.** On utilise l'identité remarquable :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Avec $a = x^3$ et $b = 2$, on obtient :

$$(x^3 - 2)^2 = (x^3)^2 - 2 \times x^3 \times 2 + 2^2.$$

Donc :

$$(x^3 - 2)^2 = x^6 - 4x^3 + 4.$$

Réponse correcte : **B**.

**Question 6.** La droite représentée passe par les points $(-2;4)$ et $(6;0)$.
Son coefficient directeur est :

$$m = \frac{0-4}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

La droite coupe l'axe des ordonnées en 3, donc son équation réduite est :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Réponse correcte : **A**.

**Question 7.** La droite $\Delta$ a pour équation :

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Une droite parallèle à $\Delta$ a le même vecteur normal, donc une équation de la forme :

$$x + 3y + c = 0.$$

Elle passe par $C(1;5)$, donc :

$$1 + 3 \times 5 + c = 0.$$

Ainsi :

$$1 + 15 + c = 0,$$

d'où :

$$c = -16.$$

Donc une équation de la droite cherchée est :

$$x + 3y - 16 = 0.$$

Réponse correcte : **A**.

**Question 8.** La droite $\Delta$ a pour équation :

$$x + 3y - 5 = 0.$$

On peut écrire :

$$3y = -x + 5,$$

donc :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Son coefficient directeur est donc :

$$-\frac{1}{3}.$$

Une droite perpendiculaire a un coefficient directeur égal à 3.
La droite cherchée passe par $C(1;5)$, donc :

$$y - 5 = 3(x-1).$$

Ainsi :

$$y - 5 = 3x - 3,$$

donc :

$$y = 3x + 2.$$

Sous forme cartésienne :

$$-3x + y - 2 = 0.$$

Réponse correcte : **B**.

**Question 9.** Le cercle de centre $D(4;1)$ et de rayon 1 a pour équation :

$$(x-4)^2+(y-1)^2=1.$$

On développe :

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1=1.$$

Donc :

$$x^2+y^2-8x-2y+16=0.$$

Réponse correcte : **A**.

**Question 10.** On remplace $x$ par 4 et $y$ par 0 dans l'équation :

$$3x+4y-12=0.$$

On obtient :

$$3\times 4+4\times 0-12=12-12=0.$$

Donc le point $M(4;0)$ appartient bien à la droite.

Réponse correcte : **A**.

## Deuxième partie – Exercices

### Correction – Exercice 1 – Géométrie analytique

On considère :

$$I(3;4),\qquad C(0;3).$$

**1.** Comme $O(0;0)$, on a :

$$\overrightarrow{OI}(3;4).$$

De même :

$$\overrightarrow{OC}(0;3).$$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}(3;4)}\qquad\boxed{\overrightarrow{OC}(0;3)}$$

**2.** On calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}=3\times 0+4\times 3.$$

Donc :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}=12.$$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}=12}$$

**3.** Le point $H$ est le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(OI)$.
Cela signifie que :

$$(CH)\perp(OI).$$

Or le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la droite $(OI)$.
Donc, comme $(CH)$ est perpendiculaire à $(OI)$, le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur normal à la droite $(CH)$.

$$\boxed{\overrightarrow{OI}(3;4)\text{ est un vecteur normal à }(CH).}$$

**4.** Une droite ayant pour vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ admet une équation de la forme :

$$ax+by+c=0.$$

Ici :

$$\vec{n}=\overrightarrow{OI}(3;4).$$

Donc une équation de $(CH)$ est de la forme :

$$3x + 4y + c = 0.$$

Comme la droite passe par $C(0; 3)$, on remplace :

$$3 \times 0 + 4 \times 3 + c = 0.$$

Donc :

$$12 + c = 0,$$

d'où :

$$c = -12.$$

Ainsi :

$$3x + 4y - 12 = 0.$$

$$\boxed{(CH) :\ 3x + 4y - 12 = 0}$$

**5.** Le cercle $\mathcal{E}$ a pour centre $D(4; 1)$ et pour rayon 1.
Son équation est donc :

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

On développe :

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 1.$$

On simplifie :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0.$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0}$$

**6.** On vérifie d'abord si $M(4; 0)$ appartient à la droite $(CH)$ :

$$3x + 4y - 12 = 0.$$

Avec $M(4; 0)$ :

$$3 \times 4 + 4 \times 0 - 12 = 12 - 12 = 0.$$

Donc :

$$M \in (CH).$$

On vérifie maintenant si $M$ appartient au cercle :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0.$$

Avec $M(4; 0)$ :

$$4^2 + 0^2 - 8 \times 4 - 2 \times 0 + 16 = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Donc :

$$M \in \mathcal{E}.$$

Ainsi, $M$ appartient à la fois à la droite $(CH)$ et au cercle $\mathcal{E}$.

$$\boxed{M(4; 0) \in (CH) \cap \mathcal{E}}$$

## Correction – Exercice 2 – Droites parallèles et perpendiculaires

On considère :

$$A(2; 1), \qquad B(-4; 3), \qquad C(1; 5).$$

**1.** On vérifie que les points $A$ et $B$ appartiennent à la droite d'équation :

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Pour $A(2;1)$ :

$$2 + 3 \times 1 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0.$$

Donc $A$ appartient à cette droite.
Pour $B(-4;3)$ :

$$-4 + 3 \times 3 - 5 = -4 + 9 - 5 = 0.$$

Donc $B$ appartient aussi à cette droite.
Comme $A$ et $B$ sont deux points distincts, la droite $(AB)$ a bien pour équation :

$$x + 3y - 5 = 0.$$

$$\boxed{(AB) : \ x + 3y - 5 = 0}$$

**2.** Une droite parallèle à $(AB)$ a le même vecteur normal.
Donc elle admet une équation de la forme :

$$x + 3y + c = 0.$$

Elle passe par $C(1;5)$, donc :

$$1 + 3 \times 5 + c = 0.$$

Ainsi :

$$16 + c = 0,$$

d'où :

$$c = -16.$$

Donc :

$$d_1 : \ x + 3y - 16 = 0.$$

$$\boxed{d_1 : \ x + 3y - 16 = 0}$$

**3.** On peut écrire l'équation de $(AB)$ sous forme réduite :

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Donc :

$$3y = -x + 5,$$

puis :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Le coefficient directeur de $(AB)$ est :

$$-\frac{1}{3}.$$

Une droite perpendiculaire à $(AB)$ a donc pour coefficient directeur :

$$3.$$

Elle passe par $C(1;5)$, donc :

$$y - 5 = 3(x - 1).$$

On développe :

$$y - 5 = 3x - 3.$$

Donc :

$$y = 3x + 2.$$

Sous forme cartésienne :

$$-3x + y - 2 = 0.$$

$$\boxed{d_2 : \ -3x + y - 2 = 0}$$

## Correction – Exercice 3 – Fonction rationnelle, signe et variations

On considère :

$$f(x) = x - 6 + \frac{9}{x}$$

sur l'intervalle $[0{,}5; 8]$, et :

$$g(x) = x^2 - 9.$$

**1.** On reconnaît une différence de deux carrés :

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2.$$

Donc :

$$g(x) = (x-3)(x+3).$$

$$\boxed{g(x) = (x-3)(x+3)}$$

**2.** On étudie le signe de :

$$g(x) = (x-3)(x+3).$$

Les racines sont :

$$x = -3 \qquad \text{et} \qquad x = 3.$$

Comme le coefficient de $x^2$ est positif, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\boxed{g(x) > 0 \text{ sur } ]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[}$$

$$\boxed{g(x) < 0 \text{ sur } ]-3; 3[}$$

$$\boxed{g(-3) = g(3) = 0}$$

**3.** On dérive :

$$f(x) = x - 6 + \frac{9}{x}.$$

On sait que :

$$\left(\frac{9}{x}\right)' = -\frac{9}{x^2}.$$

Donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Or :

$$g(x) = x^2 - 9.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$

**4.** Sur l'intervalle $[0{,}5 ; 8]$, on a :

$$x^2 > 0.$$

Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.
Or sur $[0{,}5 ; 8]$ :

$$g(x) < 0 \text{ sur } [0{,}5 ; 3[$$

et :

$$g(x) > 0 \text{ sur } ]3 ; 8].$$

Donc :

$$f'(x) < 0 \text{ sur } [0{,}5 ; 3[$$

et :

$$f'(x) > 0 \text{ sur } ]3 ; 8].$$

Enfin :

$$f'(3) = 0.$$

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0{,}5 ; 3]}$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [3 ; 8]}$$

**5.** Calculons les valeurs importantes.

$$f(0{,}5) = 0{,}5 - 6 + \frac{9}{0{,}5}.$$

Comme :

$$\frac{9}{0{,}5} = 18,$$

on obtient :

$$f(0{,}5) = 0{,}5 - 6 + 18 = 12{,}5 = \frac{25}{2}.$$

Ensuite :

$$f(3) = 3 - 6 + \frac{9}{3} = 3 - 6 + 3 = 0.$$

Enfin :

$$f(8) = 8 - 6 + \frac{9}{8} = 2 + \frac{9}{8} = \frac{16}{8} + \frac{9}{8} = \frac{25}{8}.$$

Le tableau de variations est donc :

| $x$ | $0{,}5$ | $3$ | $8$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{25}{2}$ | $0$ | $\frac{25}{8}$ |
| | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$$\boxed{f \text{ admet un minimum égal à } 0 \text{ pour } x = 3.}$$

**6.** Une tangente à la courbe de $f$ parallèle à la droite :

$$y = x + 1$$

doit avoir le même coefficient directeur.
La droite $y = x + 1$ a pour coefficient directeur :

$$1.$$

Il faut donc résoudre :

$$f'(x) = 1.$$

Or :

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

Donc :

$$1 - \frac{9}{x^2} = 1.$$

Ainsi :

$$-\frac{9}{x^2} = 0.$$

Cette équation est impossible, car $x^2 > 0$ et donc :

$$-\frac{9}{x^2} \neq 0.$$

Il n'existe donc aucune tangente à la courbe de $f$ parallèle à la droite $y = x + 1$.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucune tangente parallèle à } y = x + 1.}$$