Sujet 3 Correction détaillée

Première spécialité mathématiques

Préparation Bac

Réponses du QCM : $\boxed{1B}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{3A}$ $\boxed{4A}$ $\boxed{5B}$ $\boxed{6A}$ $\boxed{7A}$ $\boxed{8A}$ $\boxed{9A}$ $\boxed{10B}$ $\boxed{11A}$ $\boxed{12B}$.

Première partie : Automatismes et raisonnement rapide

Question 1

On sait que $a > 0$, donc $-2a < 0$.
Comme la puissance 3 est impaire :

$$(-2a)^3 < 0.$$

De plus, $b < 0$, mais :

$$b^2 > 0.$$

Donc :

$$(-2a)^3 b^2 < 0.$$

Réponse B : négatif

Question 2

On considère :

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 10.$$

On factorise d'abord par -2 les termes en x :

$$f(x) = -2(x^2 - 4x) + 10.$$

On complète le carré :

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4.$$

Donc :

$$f(x) = -2\left((x-2)^2 - 4\right) + 10.$$

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 8 + 10.$$

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 18.$$

Réponse A : $-2(x-2)^2 + 18$

Question 3

On résout :

$$4(x-1)^2 = 36.$$

On divise par 4 :

$$(x-1)^2 = 9.$$

Donc :

$$x - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -3.$$

Ainsi :

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

$$S = \{-2; 4\}$$

Question 4

La droite d_1 a pour équation :

$$-2x + 3y + 4 = 0.$$

Une droite parallèle à d_1 a les mêmes coefficients devant x et y. Donc une équation de d_2 est de la forme :

$$-2x + 3y + c = 0.$$

Elle passe par $A(-2; 3)$. On remplace :

$$-2(-2) + 3(3) + c = 0.$$

$$4 + 9 + c = 0.$$

$$13 + c = 0.$$

$$c = -13.$$

Donc :

$$-2x + 3y - 13 = 0.$$

En multipliant par -1, on obtient :

$$2x - 3y + 13 = 0.$$

Réponse A : $2x - 3y + 13 = 0$

Question 5

Si :

$$f'(2) = 0,$$

et si f' change de signe de $+$ à $-$ en 2, alors la fonction f est d'abord croissante puis décroissante.
Donc f atteint un maximum local en 2.

Réponse B : un maximum local

Question 6

La suite est définie par :

$$u_0 = 4$$

et :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

On calcule :

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7.$$

$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 14 - 3 = 11.$$

Réponse A : 11

Question 7

La suite (v_n) est géométrique de raison -2, et :

$$v_1 = 3.$$

On veut calculer v_4. On passe de v_1 à v_4 en multipliant trois fois par la raison :

$$v_4 = v_1 \times (-2)^3.$$

Donc :

$$v_4 = 3 \times (-8).$$

$$v_4 = -24.$$

Réponse A : -24

Question 8

On résout :

$$e^{2x-1} \times e^{1-x} > \frac{1}{e}.$$

On utilise la propriété :

$$e^a \times e^b = e^{a+b}.$$

Donc :

$$e^{2x-1} \times e^{1-x} = e^{2x-1+1-x} = e^x.$$

L'inéquation devient :

$$e^x > \frac{1}{e}.$$

Or :

$$\frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Donc :

$$e^x > e^{-1}.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$x > -1.$$

Réponse A : $]-1; +\infty[$

Question 9

On considère :

$$h(x) = (2x-1)e^x.$$

On utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Ici :

$$u(x) = 2x-1, \qquad v(x) = e^x.$$

Donc :

$$u'(x) = 2, \qquad v'(x) = e^x.$$

Ainsi :

$$h'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x.$$

On factorise par e^x :

$$h'(x) = (2 + 2x - 1)\, e^x.$$

$$h'(x) = (2x+1)e^x.$$

Réponse A : $(2x+1)e^x$

Question 10

On donne :

$$\vec{u}(3;-4).$$

La norme est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}.$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16}.$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{25} = 5.$$

Réponse B : 5

Question 11

On sait que :

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

et :

$$P_A(B) = \frac{3}{4}.$$

Par définition :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Donc :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{20}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}.$$

Réponse A : $\frac{3}{10}$

Question 12

On résout :

$$(x-2)(x+5) > 0.$$

Les racines sont :

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = -5.$$

Le produit est positif lorsque les deux facteurs sont de même signe. Donc le produit est positif à l'extérieur des racines :

$$x < -5 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

Ainsi :

$$S =]-\infty;-5[\cup]2;+\infty[.$$

Réponse B : $]-\infty;-5[\cup]2;+\infty[$

Deuxième partie : Exercices avancés

Exercice 1 - Fonction polynomiale, paramètre et tangence

On considère :

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 1.$$

1. Montrer que l'on peut écrire $f_m(x) = (x-m)^2 + 2m + 1$.
On développe :

$$(x-m)^2 = x^2 - 2mx + m^2.$$

Donc :

$$(x-m)^2 + 2m + 1 = x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 1.$$

On retrouve exactement :

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 1.$$

$$\boxed{f_m(x) = (x-m)^2 + 2m + 1}$$

2. En déduire les coordonnées du sommet.
La forme canonique est :

$$f_m(x) = (x-m)^2 + 2m + 1.$$

Une parabole d'équation :

$$y = (x-\alpha)^2 + \beta$$

a pour sommet :

$$S(\alpha;\beta).$$

Ici :

$$\alpha = m, \qquad \beta = 2m + 1.$$

Donc le sommet est :

$$\boxed{S(m; 2m+1)}.$$

3. Déterminer la valeur de m pour laquelle la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
La parabole est tangente à l'axe des abscisses lorsque son minimum est égal à 0.
Le minimum de f_m est :

$$2m + 1.$$

On cherche donc :

$$2m + 1 = 0.$$

$$2m = -1.$$

$$m = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

4. Pour cette valeur de m, donner la forme factorisée de $f_m(x)$.
Pour :

$$m = -\frac{1}{2},$$

on a :

$$f_m(x) = (x-m)^2 + 2m + 1.$$

Donc :

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1.$$

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 1.$$

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Sous forme factorisée :

$$\boxed{f_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

5. On suppose maintenant que $m = 1$. Résoudre $f_1(x) \leq 7$.
Pour $m = 1$, on a :

$$f_1(x) = (x-1)^2 + 2 \times 1 + 1.$$

$$f_1(x) = (x-1)^2 + 3.$$

On résout :

$$f_1(x) \leq 7.$$

Donc :

$$(x-1)^2 + 3 \leq 7.$$

$$(x-1)^2 \leq 4.$$

Or :

$$(x-1)^2 \leq 4$$

équivaut à :

$$-2 \leq x - 1 \leq 2.$$

On ajoute 1 :

$$-1 \leq x \leq 3.$$

Donc :

$$\boxed{x \in [-1; 3]}.$$

Exercice 2 - Exponentielle et conditions initiales

On considère :

$$g(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}.$$

La courbe passe par :

$$A(0; 1).$$

Cela signifie :

$$g(0) = 1.$$

1. Montrer que $b = 1$.
On calcule :

$$g(0) = (0^2 + a \times 0 + b)e^0.$$

$$g(0) = b.$$

Comme :

$$g(0) = 1,$$

on obtient :

$$\boxed{b = 1}.$$

2. Déterminer la valeur de a.
On sait que la tangente à la courbe en A a pour coefficient directeur -3. Donc :

$$g'(0) = -3.$$

On dérive :

$$g(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}.$$

On pose :

$$u(x) = x^2 + ax + b, \qquad v(x) = e^{-x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x + a, \qquad v'(x) = -e^{-x}.$$

Donc :

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$g'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x}.$$

$$g'(x) = \left(2x + a - x^2 - ax - b\right) e^{-x}.$$

En 0 :

$$g'(0) = a - b.$$

Or $b = 1$, donc :

$$g'(0) = a - 1.$$

Comme $g'(0) = -3$, on a :

$$a - 1 = -3.$$

$$a = -2.$$

$$\boxed{a = -2}$$

3. Montrer que $g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}$.
Avec :

$$a = -2, \qquad b = 1,$$

on a :

$$g(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}.$$

On pose :

$$u(x) = x^2 - 2x + 1, \qquad v(x) = e^{-x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x - 2, \qquad v'(x) = -e^{-x}.$$

Donc :

$$g'(x) = (2x - 2)e^{-x} - (x^2 - 2x + 1)e^{-x}.$$

$$g'(x) = \left(2x - 2 - x^2 + 2x - 1\right) e^{-x}.$$

$$g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}.$$

$$\boxed{g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}}$$

4. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$.
On factorise :

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 3).$$

Or :

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Donc :

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x - 1)(x - 3).$$

Les racines sont :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

Comme le coefficient dominant est négatif, le trinôme est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.
Donc :

$$-x^2 + 4x - 3 < 0 \quad \text{sur }]-\infty; 1[$$

$$-x^2 + 4x - 3 > 0 \quad \text{sur }]1; 3[$$

$$-x^2 + 4x - 3 < 0 \quad \text{sur }]3; +\infty[$$

5. En déduire les variations de g.
On a :

$$g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}.$$

Or :

$$e^{-x} > 0.$$

Donc le signe de $g'(x)$ est le signe de :

$$-x^2 + 4x - 3.$$

Ainsi, g est décroissante sur $]-\infty; 1]$, croissante sur $[1; 3]$, puis décroissante sur $[3; +\infty[$.
On peut aussi calculer :

$$g(1) = 0$$

et :

$$g(3) = 4e^{-3}.$$

$$\boxed{g(1) = 0 \quad \text{et} \quad g(3) = 4e^{-3}}$$

Exercice 3 - Optimisation géométrique sans calculatrice

On considère la parabole :

$$y = -x^2 + 3x.$$

Pour :

$$x \in [0; 3],$$

on place :

$$M(x; -x^2 + 3x).$$

Le rectangle $OHMN$ a :

$$OH = x$$

et :

$$ON = -x^2 + 3x.$$

1. Exprimer l'aire $A(x)$.

$$A(x) = OH \times ON.$$

$$A(x) = x(-x^2 + 3x).$$

$$\boxed{A(x) = x(-x^2 + 3x)}$$

2. Montrer que $A(x) = -x^3 + 3x^2$.

$$A(x) = x(-x^2 + 3x).$$

$$A(x) = -x^3 + 3x^2.$$

$$\boxed{A(x) = -x^3 + 3x^2}$$

3. Étudier les variations de A sur $[0; 3]$.
On dérive :

$$A'(x) = -3x^2 + 6x.$$

$$A'(x) = 3x(2 - x).$$

Si $0 < x < 2$, alors :

$$A'(x) > 0.$$

Si $2 < x < 3$, alors :

$$A'(x) < 0.$$

Donc A est croissante sur $[0; 2]$, puis décroissante sur $[2; 3]$.
On calcule :

$$A(0) = 0.$$

$$A(2) = 4.$$

$$A(3) = 0.$$

Le maximum est donc atteint pour :

$$x = 2.$$

4. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.
Pour $x = 2$, on a :

$$OH = 2.$$

La hauteur vaut :

$$ON = -2^2 + 3 \times 2 = 2.$$

Les dimensions du rectangle d'aire maximale sont :

$$\boxed{2 \text{ et } 2}.$$

L'aire maximale est :

$$\boxed{4}.$$

Exercice 4 - Suite auxiliaire et seuil exact

On définit la suite :

$$u_0 = 2$$

et :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4.$$

$$\boxed{u_1 = 4}$$

Puis :

$$u_2 = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5.$$

$$\boxed{u_2 = 5}$$

2. Montrer que (v_n) est géométrique.
On pose :

$$v_n = u_n - 6.$$

Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3.$$

Or :

$$\frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}u_n - 3.$$

Donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 6).$$

Comme $v_n = u_n - 6$, on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison :

$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

3. En déduire une expression de u_n.

$$v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4.$$

Donc :

$$v_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or :

$$v_n = u_n - 6.$$

Donc :

$$u_n - 6 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > \frac{47}{8}$.
On veut :

$$6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{47}{8}.$$

Donc :

$$6 - \frac{4}{2^n} > \frac{47}{8}.$$

$$-\frac{4}{2^n} > -\frac{1}{8}.$$

En multipliant par -1, on inverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{4}{2^n} < \frac{1}{8}.$$

Donc :

$$32 < 2^n.$$

Or :

$$2^5 = 32$$

et :

$$2^6 = 64.$$

Comme l'inégalité est stricte, $n = 5$ ne convient pas.
Donc :

$$\boxed{n = 6}.$$

Exercice 5 - Probabilités conditionnelles et indépendance

On note :

S : l'élève a fait au moins trois sujets blancs

et :

R : l'élève obtient une note supérieure ou égale à 12.

On sait que :

$$P(S) = 60\% = \frac{3}{5}.$$

Donc :

$$P(\overline{S}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Parmi les élèves ayant fait au moins trois sujets blancs :

$$P_S(R) = \frac{5}{6}.$$

Donc :

$$P_S(\overline{R}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

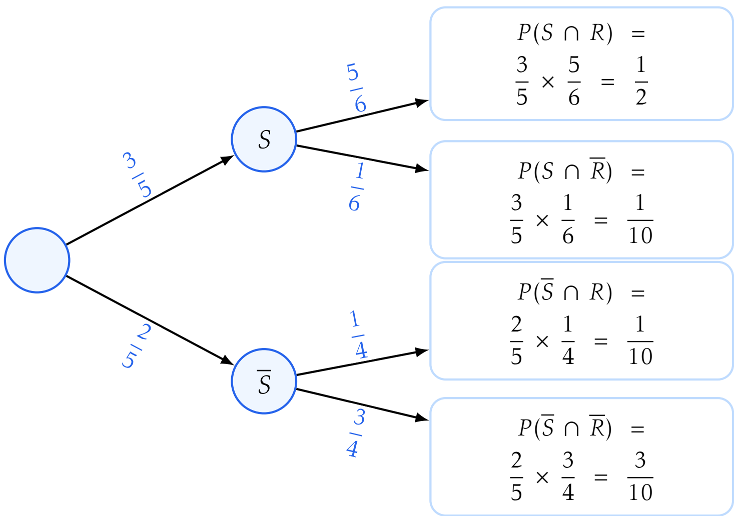
Parmi les autres élèves :

$$P_{\overline{S}}(R) = \frac{1}{4}.$$

Donc :

$$P_{\overline{S}}(\overline{R}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

1. Arbre pondéré.



2. Calculer $P(S \cap R)$, puis $P(\overline{S} \cap R)$.

$$P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R).$$

Donc :

$$P(S \cap R) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{P(S \cap R) = \frac{1}{2}}$$

Ensuite :

$$P(\overline{S} \cap R) = P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(R).$$

$$P(\overline{S} \cap R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

$$\boxed{P(\overline{S} \cap R) = \frac{1}{10}}$$

3. En déduire $P(R)$.
Les événements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers.

Donc :

$$P(R) = P(S \cap R) + P(\overline{S} \cap R).$$

$$P(R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}.$$

$$P(R) = \frac{5}{10} + \frac{1}{10}.$$

$$P(R) = \frac{6}{10}.$$

$$P(R) = \frac{3}{5}.$$

$$\boxed{P(R) = \frac{3}{5}}$$

4. Calculer $P_R(S)$, c'est-à-dire $P(S \mid R)$. Interpréter le résultat.
On cherche la probabilité qu'un élève ait fait au moins trois sujets blancs sachant qu'il a obtenu une note supérieure ou égale à 12.
Par définition :

$$P_R(S) = P(S \mid R) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)}.$$

Donc :

$$P_R(S) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}.$$

$$P_R(S) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}.$$

$$P_R(S) = \frac{5}{6}.$$

$$\boxed{P_R(S) = \frac{5}{6}}$$

Interprétation : parmi les élèves qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12, la proportion de ceux qui ont fait au moins trois sujets blancs est :

$$\boxed{\frac{5}{6}}.$$

5. Les événements S et R sont-ils indépendants ?
Deux événements S et R sont indépendants si :

$$P(S \cap R) = P(S) \times P(R).$$

On a :

$$P(S \cap R) = \frac{1}{2}.$$

Et :

$$P(S) \times P(R) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}.$$

$$P(S) \times P(R) = \frac{9}{25}.$$

Or :

$$\frac{1}{2} \neq \frac{9}{25}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Les événements } S \text{ et } R \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Exercice 6 - Produit scalaire, cercle et lieu de points

On donne :

$$A(-1;2), \qquad B(5;4), \qquad C(2;-3).$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
On calcule :

$$\overrightarrow{AB}(5-(-1);4-2).$$

$$\overrightarrow{AB}(6;2).$$

De même :

$$\overrightarrow{AC}(2-(-1);-3-2).$$

$$\overrightarrow{AC}(3;-5).$$

Le produit scalaire est :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 3 + 2\times(-5).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18-10.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8}$$

Comme le produit scalaire n'est pas nul, les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

$$\boxed{(AB) \text{ et } (AC) \text{ ne sont pas perpendiculaires.}}$$

2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$.
Soit I ce milieu :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

$$I\left(\frac{-1+5}{2};\frac{2+4}{2}\right).$$

$$I(2;3).$$

On calcule :

$$AB^2 = (5-(-1))^2+(4-2)^2.$$

$$AB^2 = 6^2+2^2 = 40.$$

Le rayon vaut :

$$r = \frac{AB}{2}.$$

Donc :

$$r^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{40}{4} = 10.$$

Une équation du cercle est donc :

$$\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2 = 10}.$$

3. Montrer que $M\in\mathcal{C}$ équivaut à

$$(x+1)(x-5)+(y-2)(y-4) = 0.$$

D'après le théorème du cercle de diamètre, pour un point M distinct de A et B,

$$M\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0.$$

On calcule :
$$\overrightarrow{MA}(-1-x;2-y)$$
et :
$$\overrightarrow{MB}(5-x;4-y).$$
Donc :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(-1-x)(5-x)+(2-y)(4-y).$$
Or :
$$(-1-x)(5-x)=(x+1)(x-5),$$
et :
$$(2-y)(4-y)=(y-2)(y-4).$$
Ainsi :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x+1)(x-5)+(y-2)(y-4).$$
Donc :
$$M\in\mathcal{C}\Longleftrightarrow\boxed{(x+1)(x-5)+(y-2)(y-4)=0}.$$

4. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ situés sur l'axe des abscisses.
Les points situés sur l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle :
$$y=0.$$
On remplace dans :
$$(x+1)(x-5)+(y-2)(y-4)=0.$$
On obtient :
$$(x+1)(x-5)+(0-2)(0-4)=0.$$
$$(x+1)(x-5)+8=0.$$
On développe :
$$x^2-4x+3=0.$$
On factorise :
$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$
Donc :
$$(x-1)(x-3)=0.$$
Ainsi :
$$x=1\quad\text{ou}\quad x=3.$$
Les points cherchés sont :
$$\boxed{(1;0)\text{ et }(3;0)}.$$

Grille finale et barème

QCM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	B	A	A	A	B	A	A	A	A	B	A	B

Partie	**Points**
Première partie : Automatismes - QCM	6
Exercice 1	3
Exercice 2	3
Exercice 3	2
Exercice 4	2
Exercice 5	2
Exercice 6	2
Total	**20**