Sujet 3 - Préparation Bac

Première spécialité mathématiques

Calculatrice interdite - Durée conseillée : 2 heures

Première partie : Automatismes et raisonnement rapide 6 points

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

Question 1. On sait que $a > 0$ et $b < 0$. Le signe de $(-2a)^3 b^2$ est :

A. positif

B. négatif

C. nul

D. impossible à déterminer

Question 2. On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 10.$$

La forme canonique de f est :

A. $-2(x-2)^2 + 18$

B. $-2(x+2)^2 + 18$

C. $2(x-2)^2 + 18$

D. $-2(x-2)^2 - 18$

Question 3. L'équation

$$4(x-1)^2 = 36$$

admet pour ensemble de solutions :

A. $\{-2; 4\}$

B. $\{-4; 2\}$

C. $\{-3; 3\}$

D. $\{2; 4\}$

Question 4. On considère la droite d_1 d'équation

$$-2x + 3y + 4 = 0.$$

La droite d_2 est parallèle à d_1 et passe par le point $A(-2; 3)$. Une équation de la droite d_2 est :

A. $2x - 3y + 13 = 0$

B. $-2x + 3y + 13 = 0$

C. $3x + 2y = 0$

D. $2x + 3y - 5 = 0$

Question 5. Si $f'(2) = 0$ et si f' change de signe de $+$ à $-$ en 2, alors f admet en 2 :

A. un minimum local

B. un maximum local

C. un point d'inflexion certain

D. aucun extremum possible

Question 6. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Alors u_3 vaut :

A. 11

B. 17

C. 23

D. 29

Question 7. Si (v_n) est une suite géométrique de raison -2 et si $v_1 = 3$, alors v_4 vaut :

A. -24

B. 24

C. -48 **D.** 48

Question 8. Pour tout réel x, l'inéquation

$$e^{2x-1} \times e^{1-x} > \frac{1}{e}$$

a pour ensemble de solutions :

A. $]-1;+\infty[$

B. $]-\infty;-1[$

C. $]1;+\infty[$

D. $]-\infty;1[$

Question 9. La dérivée de la fonction

$$x \mapsto (2x-1)e^x$$

est :

A. $(2x+1)e^x$

B. $2e^x$

C. $(2x-3)e^x$

D. $(2x-1)e^x$

Question 10. Dans un repère orthonormé, on donne le vecteur $\vec{u}(3;-4)$. Sa norme est :

A. 1

B. 5

C. 7

D. 25

Question 11. On donne $P(A) = \dfrac{2}{5}$ et $P_A(B) = \dfrac{3}{4}$. Alors $P(A \cap B)$ vaut :

A. $\dfrac{3}{10}$

B. $\dfrac{5}{9}$

C. $\dfrac{7}{20}$

D. $\dfrac{1}{2}$

Question 12. L'inéquation

$$(x-2)(x+5) > 0$$

a pour ensemble de solutions :

A. $]-5;2[$

B. $]-\infty;-5[\cup]2;+\infty[$

C. $]-\infty;2[$

D. $]-5;+\infty[$

Deuxième partie : Exercices avancés 14 points

Exercice 1 - Fonction polynomiale, paramètre et tangence 3 points

On considère, pour tout réel m, la fonction f_m définie sur l'ensemble des réels par

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 1.$$

1. Montrer que l'on peut écrire
$$f_m(x) = (x - m)^2 + 2m + 1.$$
2. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentant f_m.
3. Déterminer la valeur de m pour laquelle la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
4. Pour cette valeur de m, donner la forme factorisée de $f_m(x)$.
5. On suppose maintenant que $m = 1$. Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation
$$f_1(x) \leq 7.$$

Exercice 2 - Exponentielle et conditions initiales 3 points

On considère une fonction g définie sur l'ensemble des réels par

$$g(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x},$$

où a et b sont deux réels. On sait que la courbe représentative de g passe par le point $A(0; 1)$ et que la tangente à la courbe en A a pour coefficient directeur -3.

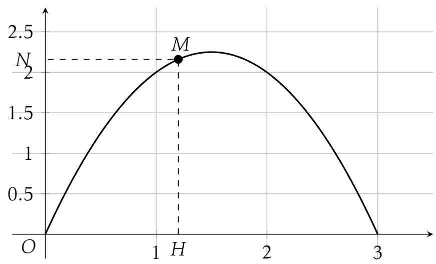
1. Montrer que $b = 1$.
2. Déterminer la valeur de a.
3. On admet pour la suite que
$$g(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}.$$
Montrer que
$$g'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}.$$
4. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$ sur l'ensemble des réels.
5. En déduire les variations de g sur l'ensemble des réels.

Exercice 3 - Optimisation géométrique sans calculatrice 2 points

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation

$$y = -x^2 + 3x.$$

Pour $x \in [0; 3]$, on place le point $M(x; -x^2 + 3x)$ sur $\mathcal{P}$. On construit le rectangle $OHMN$, où $O(0; 0)$, $H(x; 0)$, $M(x; -x^2 + 3x)$ et $N(0; -x^2 + 3x)$.



1. Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle en fonction de x.
2. Montrer que
$$A(x) = -x^3 + 3x^2.$$
3. Étudier les variations de A sur $[0; 3]$.
4. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.

Exercice 4 - Suite auxiliaire et seuil exact **2 points**

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que

$$u_n > \frac{47}{8}.$$

Exercice 5 - Probabilités conditionnelles et indépendance **2 points**

Dans un groupe de préparation au bac, 60 % des élèves ont fait au moins trois sujets blancs. Parmi eux, $\frac{5}{6}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12. Parmi les autres élèves, seulement $\frac{1}{4}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12.
On note S l'évènement : « l'élève a fait au moins trois sujets blancs » et R l'évènement : « l'élève obtient une note supérieure ou égale à 12 ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(S \cap R)$, puis $P(\overline{S} \cap R)$.
3. En déduire $P(R)$.
4. Calculer $P_R(S)$, c'est-à-dire $P(S \mid R)$. Interpréter le résultat.
5. Les évènements S et R sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 6 - Produit scalaire, cercle et lieu de points **2 points**

Dans un repère orthonormé, on donne les points

$$A(-1; 2), \qquad B(5; 4), \qquad C(2; -3).$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
3. Soit $M(x; y)$. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ équivaut à

$$(x + 1)(x - 5) + (y - 2)(y - 4) = 0.$$

4. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ situés sur l'axe des abscisses.

Fin du sujet