

SUJET 2 CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Épreuve anticipée de première - Candidats ayant suivi la spécialité

Durée conseillée : 2 heures

Réponses du QCM : 1B 2B 3B 4B 5B 6D 7A 8A 9C 10C 11B 12A.

Première partie : Automatismes - QCM

6 points

Pour cette première partie, chaque bonne réponse rapporte 0,5 point. Les calculs ci-dessous expliquent les réponses, même si aucune justification n'était demandée dans le sujet.

Question 1

On considère

$$A = \frac{2}{3} - \frac{3}{\frac{1}{2}}.$$

On calcule d'abord la division :

$$\frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6.$$

Donc

$$A = \frac{2}{3} - 6 = \frac{2}{3} - \frac{18}{3} = \frac{2 - 18}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Ainsi la bonne réponse est A.

Question 2

On résout

$$\frac{2x - 3}{3} = \frac{3x - 1}{2}.$$

Par produit en croix :

$$2(2x - 3) = 3(3x - 1).$$

On développe :

$$4x - 6 = 9x - 3.$$

On regroupe :

$$4x - 9x = -3 + 6,$$

soit

$$-5x = 3.$$

Donc

$$x = -\frac{3}{5}.$$

Ainsi la bonne réponse est A.

Question 3

On développe

$$(2x - 3)^2 - (-2x - 3)^2.$$

On utilise l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Ici

$$a = 2x - 3 \quad \text{et} \quad b = -2x - 3.$$

Alors

$$a - b = (2x - 3) - (-2x - 3) = 2x - 3 + 2x + 3 = 4x,$$

et

$$a + b = (2x - 3) + (-2x - 3) = 2x - 3 - 2x - 3 = -6.$$

Donc

$$(2x - 3)^2 - (-2x - 3)^2 = 4x \times (-6) = -24x.$$

Ainsi la bonne réponse est **A**.

Question 4

On factorise

$$4(x - 2)^2 - 9(x + 1)^2.$$

On remarque que

$$4(x - 2)^2 = (2(x - 2))^2 = (2x - 4)^2$$

et

$$9(x + 1)^2 = (3(x + 1))^2 = (3x + 3)^2.$$

Donc

$$4(x - 2)^2 - 9(x + 1)^2 = (2x - 4)^2 - (3x + 3)^2.$$

On utilise encore

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

avec

$$a = 2x - 4 \quad \text{et} \quad b = 3x + 3.$$

Ainsi

$$a - b = (2x - 4) - (3x + 3) = -x - 7$$

et

$$a + b = (2x - 4) + (3x + 3) = 5x - 1.$$

Donc

$$4(x - 2)^2 - 9(x + 1)^2 = (-x - 7)(5x - 1).$$

Ainsi la bonne réponse est **C**.

Question 5

Une augmentation de 10 % correspond au coefficient multiplicateur

$$1 + \frac{10}{100} = 1,10.$$

Une baisse de 20 % correspond au coefficient multiplicateur

$$1 - \frac{20}{100} = 0,80.$$

Le coefficient global est donc

$$1,10 \times 0,80 = 0,88.$$

Or

$$0,88 = 1 - 0,12.$$

Le taux d'évolution global est donc -12 %. La bonne réponse est **B**.

Question 6

Multiplier une quantité par 0,85 revient à comparer ce coefficient à 1 :

$$0,85 - 1 = -0,15.$$

Le taux d'évolution est donc

$$-0,15 = -15\%.$$

La bonne réponse est **D**.

Question 7

On part de

$$d_1 : x + 2y - 5 = 0.$$

On met cette équation sous forme réduite :

$$2y = -x + 5,$$

donc

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Le coefficient directeur de d_1 est donc

$$m_1 = -\frac{1}{2}.$$

Une droite perpendiculaire à d_1 a pour coefficient directeur m_2 vérifiant

$$m_1 m_2 = -1.$$

Ainsi

$$-\frac{1}{2}m_2 = -1,$$

donc

$$m_2 = 2.$$

La droite d_2 est donc de la forme

$$y = 2x + b.$$

Elle passe par $A(-1; 2)$, donc

$$2 = 2(-1) + b.$$

Ainsi

$$2 = -2 + b,$$

donc

$$b = 4.$$

Une équation de d_2 est donc

$$y = 2x + 4.$$

La bonne réponse est **A**.

Question 8

On résout

$$(x + 3)(x - 2) - (2 - x)(3x + 5) = 0.$$

On remarque que

$$2 - x = -(x - 2).$$

Donc

$$-(2 - x)(3x + 5) = -(-(x - 2))(3x + 5) = (x - 2)(3x + 5).$$

L'équation devient

$$(x + 3)(x - 2) + (x - 2)(3x + 5) = 0.$$

On factorise par $(x - 2)$:

$$(x - 2)[(x + 3) + (3x + 5)] = 0.$$

On réduit :

$$(x - 2)(4x + 8) = 0.$$

Or

$$4x + 8 = 4(x + 2).$$

Donc

$$4(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Comme $4 \neq 0$,

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0.$$

Ainsi

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Donc

$$S = \{-2; 2\}.$$

La bonne réponse est **A**.

Question 9

La suite (u_n) est arithmétique, avec

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad r = 2.$$

Pour une suite arithmétique,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Donc

$$u_n = 3 + 2n.$$

On cherche n tel que $u_n = 33$:

$$3 + 2n = 33.$$

Donc

$$2n = 30,$$

d'où

$$n = 15.$$

La bonne réponse est **C**.

Question 10

La suite (v_n) est géométrique, avec

$$v_0 = 3 \quad \text{et} \quad q = 2.$$

Pour une suite géométrique,

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ainsi

$$v_4 = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48.$$

La bonne réponse est **C**.

Question 11

On considère

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}.$$

On dérive terme à terme. D'abord,

$$(4x)' = 4.$$

Ensuite,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}.$$

La bonne réponse est **B**.

Question 12

On résout

$$e^{2x+3} \geq (e^{x-1})^{-2}.$$

On simplifie le membre de droite :

$$(e^{x-1})^{-2} = e^{-2(x-1)} = e^{-2x+2}.$$

Donc l'inéquation devient

$$e^{2x+3} \geq e^{-2x+2}.$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc on compare les exposants :

$$2x + 3 \geq -2x + 2.$$

On regroupe :

$$4x \geq -1.$$

Donc

$$x \geq -\frac{1}{4}.$$

La bonne réponse est A.

Deuxième partie

14 points

Exercice 1

3 points

On considère

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

1. Factorisation.

On cherche deux nombres dont le produit vaut 6 et la somme vaut 5. Ces deux nombres sont 2 et 3, car

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{et} \quad 2 + 3 = 5.$$

On obtient donc

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

2. Résolution de $f(x) = 0$.

On résout

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Un produit est nul si au moins un des facteurs est nul. Donc

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0.$$

Ainsi

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

L'ensemble des solutions est

$$S = \{2; 3\}.$$

3. Signe de $f(x)$.

On utilise la forme factorisée

$$f(x) = (x - 2)(x - 3).$$

Les valeurs qui annulent f sont 2 et 3. On construit le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x - 2$	-	0	+	+	
$x - 3$	-	-	0	+	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Donc

$$f(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

et

$$f(x) < 0 \text{ sur }]2; 3[.$$

De plus, $f(2) = 0$ et $f(3) = 0$.

4. Résolution de l'inéquation.

On cherche les valeurs de x telles que

$$f(x) \leq 0.$$

D'après le tableau de signes, cela se produit entre les deux racines, avec les bornes incluses :

$$S = [2; 3].$$

Exercice 2

3 points

On note F l'évènement « l'élève utilise des fiches » et R l'évènement « l'élève réussit le test ».

1. Probabilités données.

D'après l'énoncé,

$$P(F) = 0,60,$$

$$P_F(R) = 0,75,$$

et

$$P_{\bar{F}}(R) = 0,40.$$

De plus,

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,60 = 0,40.$$

2. Calcul de $P(F \cap R)$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R).$$

Donc

$$P(F \cap R) = 0,60 \times 0,75 = 0,45.$$

3. Calcul de $P(\bar{F} \cap R)$.

On utilise de même

$$P(\bar{F} \cap R) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R).$$

Donc

$$P(\bar{F} \cap R) = 0,40 \times 0,40 = 0,16.$$

4. Calcul de $P(R)$.

Les évènements $F \cap R$ et $\bar{F} \cap R$ sont incompatibles et leur réunion donne l'évènement R . D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(F \cap R) + P(\bar{F} \cap R).$$

Ainsi

$$P(R) = 0,45 + 0,16 = 0,61.$$

5. Calcul de $P_R(F)$.

On cherche la probabilité qu'un élève ait utilisé des fiches sachant qu'il a réussi. Par définition,

$$P_R(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)}.$$

On remplace :

$$P_R(F) = \frac{0,45}{0,61}.$$

On écrit les deux nombres décimaux sous forme fractionnaire :

$$0,45 = \frac{45}{100} \quad \text{et} \quad 0,61 = \frac{61}{100}.$$

Donc

$$P_R(F) = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{61}{100}} = \frac{45}{100} \times \frac{100}{61} = \frac{45}{61}.$$

La fraction est irréductible. Ainsi

$$P_R(F) = \frac{45}{61}.$$

Exercice 3

3 points

Le nombre d'abonnés augmente de 8 % chaque mois. Le coefficient multiplicateur associé est

$$1 + \frac{8}{100} = 1,08.$$

1. Relation de récurrence.

Chaque mois, le nombre d'abonnés est multiplié par 1,08. Donc

$$u_{n+1} = 1,08u_n.$$

2. Nature de la suite.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre 1,08. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison

$$q = 1,08.$$

Son premier terme est

$$u_0 = 1200.$$

3. Formule explicite.

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q ,

$$u_n = u_0q^n.$$

Ici,

$$u_n = 1200 \times 1,08^n.$$

4. Calcul de u_3 .

On utilise la formule précédente :

$$u_3 = 1200 \times 1,08^3.$$

Or

$$1,08^2 = 1,1664,$$

puis

$$1,08^3 = 1,1664 \times 1,08 = 1,259712.$$

Donc

$$u_3 = 1200 \times 1,259712 = 1511,6544.$$

Arrondi à l'unité,

$$u_3 \approx 1512.$$

5. Interprétation du programme.

Dans le programme, u représente le nombre d'abonnés et n représente le nombre de mois écoulés. À chaque passage dans la boucle,

$$u \leftarrow 1,08u,$$

ce qui correspond à l'augmentation de 8 %. La boucle continue tant que

$$u < 2000.$$

Elle s'arrête dès que

$$u \geq 2000.$$

La valeur affichée par le programme est donc le nombre minimal de mois nécessaires pour atteindre au moins 2000 abonnés.

Exercice 4

3 points

On considère

$$g(x) = (-x^2 + 2x + 5) e^{-2x}$$

sur $[-2; 5]$.

1. Calculs de valeurs.

Pour $x = -2$:

$$g(-2) = (-(-2)^2 + 2(-2) + 5) e^{-2(-2)}.$$

Donc

$$g(-2) = (-4 - 4 + 5)e^4 = -3e^4.$$

Pour $x = -1$:

$$g(-1) = (-(-1)^2 + 2(-1) + 5)e^{-2(-1)}.$$

Donc

$$g(-1) = (-1 - 2 + 5)e^2 = 2e^2.$$

Pour $x = 4$:

$$g(4) = (-4^2 + 2 \times 4 + 5)e^{-8}.$$

Donc

$$g(4) = (-16 + 8 + 5)e^{-8} = -3e^{-8}.$$

Pour $x = 5$:

$$g(5) = (-5^2 + 2 \times 5 + 5)e^{-10}.$$

Donc

$$g(5) = (-25 + 10 + 5)e^{-10} = -10e^{-10}.$$

2. Calcul de la dérivée.

On pose

$$u(x) = -x^2 + 2x + 5$$

et

$$v(x) = e^{-2x}.$$

Alors

$$g(x) = u(x)v(x).$$

On calcule

$$u'(x) = -2x + 2$$

et

$$v'(x) = -2e^{-2x}.$$

Avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient

$$g'(x) = (-2x + 2)e^{-2x} + (-x^2 + 2x + 5)(-2e^{-2x}).$$

On factorise par e^{-2x} :

$$g'(x) = e^{-2x} [(-2x + 2) - 2(-x^2 + 2x + 5)].$$

On développe :

$$-2(-x^2 + 2x + 5) = 2x^2 - 4x - 10.$$

Donc

$$g'(x) = e^{-2x} [-2x + 2 + 2x^2 - 4x - 10].$$

Ainsi

$$g'(x) = e^{-2x}(2x^2 - 6x - 8).$$

On factorise le trinôme :

$$2x^2 - 6x - 8 = 2(x^2 - 3x - 4).$$

Or

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1).$$

Donc

$$g'(x) = 2(x - 4)(x + 1)e^{-2x}.$$

3. Signe de $g'(x)$.

On a

$$g'(x) = 2(x - 4)(x + 1)e^{-2x}.$$

Or

$$2 > 0$$

et, pour tout réel x ,

$$e^{-2x} > 0.$$

Le signe de $g'(x)$ dépend donc uniquement du signe de

$$(x - 4)(x + 1).$$

Les deux facteurs s'annulent en

$$x = 4 \quad \text{et} \quad x = -1.$$

Sur $[-2; 5]$, on obtient le tableau de signes :

x	-2	-1	4	5	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 4$	-	-	0	+	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Donc $g'(x) > 0$ sur $[-2; -1[$, $g'(x) < 0$ sur $] -1; 4[$ et $g'(x) > 0$ sur $]4; 5]$.

4. Tableau de variations.

D'après le signe de la dérivée, g est croissante sur $[-2; -1]$, décroissante sur $[-1; 4]$, puis croissante sur $[4; 5]$.
Avec les valeurs calculées à la première question :

$$g(-2) = -3e^4, \quad g(-1) = 2e^2,$$

$$g(4) = -3e^{-8}, \quad g(5) = -10e^{-10}.$$

On dresse le tableau :

x	-2	-1	4	5			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-3e^4$	\nearrow	$2e^2$	\searrow	$-3e^{-8}$	\nearrow	$-10e^{-10}$

5. Maximum.

Le tableau de variations montre que la plus grande valeur est atteinte pour

$$x = -1.$$

La valeur correspondante est

$$g(-1) = 2e^2.$$

Donc le maximum de g sur $[-2; 5]$ est

$$2e^2,$$

et il est atteint pour $x = -1$.

Exercice 5

2 points

On donne

$$A(-1; 3), \quad B(5; 5), \quad C(2; -2),$$

et $D(t; 2)$.

1. Coordonnées des vecteurs.

On utilise

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Donc

$$\overrightarrow{AB}(5 - (-1); 5 - 3) = (6; 2).$$

De même,

$$\overrightarrow{AC}(2 - (-1); -2 - 3) = (3; -5).$$

2. Produit scalaire.

On calcule

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 3 + 2 \times (-5).$$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 - 10 = 8.$$

3. Perpendicularité de (AB) et (AC) .

Deux droites sont perpendiculaires si le produit scalaire de deux vecteurs directeurs est nul. Ici,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8.$$

Or

$$8 \neq 0.$$

Donc les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

4. Recherche de t .

On calcule

$$\vec{AD}(t - (-1); 2 - 3) = (t + 1; -1).$$

On veut que (AD) et (AC) soient perpendiculaires. Il faut donc

$$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Or

$$\vec{AC}(3; -5).$$

Donc

$$(t + 1) \times 3 + (-1) \times (-5) = 0.$$

Ainsi

$$3(t + 1) + 5 = 0.$$

On développe :

$$3t + 3 + 5 = 0,$$

donc

$$3t + 8 = 0.$$

Finalement

$$t = -\frac{8}{3}.$$

5. Cercle de diamètre $[AB]$.

Le centre du cercle est le milieu I de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Donc

$$I\left(\frac{-1 + 5}{2}; \frac{3 + 5}{2}\right) = I(2; 4).$$

Le rayon vérifie

$$r = \frac{AB}{2}.$$

Calculons AB^2 :

$$AB^2 = (5 - (-1))^2 + (5 - 3)^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40.$$

Donc

$$r^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{40}{4} = 10.$$

Une équation du cercle de centre $I(2; 4)$ et de rayon r est donc

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

En développant,

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 10.$$

Donc

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0.$$

Grille finale et barème

QCM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	A	A	A	C	B	D	A	A	C	C	B	A

Partie	Points
Première partie : Automatismes - QCM	6
Exercice 1	3
Exercice 2	3
Exercice 3	3
Exercice 4	3
Exercice 5	2
Total	20