# CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Première spécialité

QCM et Partie 2

**Réponses du QCM :** $\boxed{1B}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{3B}$ $\boxed{4C}$ $\boxed{5A}$ $\boxed{6A}$ $\boxed{7B}$ $\boxed{8C}$ $\boxed{9A}$.

## Exercice Correction du QCM 6 points

**Question 1.** On respecte la priorité des opérations :

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times 6=\frac{3}{4}+\frac{30}{2}=\frac{3}{4}+15=\frac{3}{4}+\frac{60}{4}=\frac{63}{4}.$$

La bonne réponse est donc **B**.

**Question 2.** La partie visible représente 12 % du volume total. Si $V$ désigne le volume total, alors :

$$0{,}12V=96.$$

Donc :

$$V=\frac{96}{0{,}12}=800.$$

Le volume total est donc $800\,\text{km}^3$. La bonne réponse est **A**.

**Question 3.** Multiplier un prix par 0,78 revient à multiplier par :

$$0{,}78=1-0{,}22.$$

Le prix a donc diminué de 22 %. La bonne réponse est **B**.

**Question 4.** On étudie le signe de :

$$A(x)=(4-2x)(3x+12).$$

On commence par chercher les valeurs qui annulent chaque facteur :

$$4-2x=0\iff x=2,$$

$$3x+12=0\iff 3x=-12\iff x=-4.$$

Les deux racines sont donc $-4$ et $2$. On étudie ensuite le signe de chaque facteur.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $3x+12$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $A(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi :

$$A(x)<0 \text{ sur } ]-\infty;-4[,\quad A(x)>0 \text{ sur } ]-4;2[,\quad A(x)<0 \text{ sur } ]2;+\infty[.$$

Le tableau correspondant est celui de la réponse **C**.

**Question 5.** Le mot MATHS contient 5 lettres : $M$, $A$, $T$, $H$, $S$. Une seule lettre est une voyelle : $A$. Donc :

$$P(\text{voyelle})=\frac{1}{5}.$$

La bonne réponse est **A**.

**Question 6.** La droite passe par les points $(0;24)$ et $(4;0)$. Le coefficient directeur vaut :

$$a = \frac{0-24}{4-0} = \frac{-24}{4} = -6.$$

Comme la droite passe par $(0;24)$, l'ordonnée à l'origine est 24. Donc :

$$f(x) = -6x + 24.$$

La bonne réponse est **A**.

**Question 7.** On développe :

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

De plus :

$$(2-x)^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

Ainsi :

$$(x+3)^2 - (2-x)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4x + 4).$$

Donc :

$$(x+3)^2 - (2-x)^2 = 10x + 5.$$

La bonne réponse est **B**.

**Question 8.** On résout :

$$3(x-5) - (3x+2) = 0.$$

On développe :

$$3x - 15 - 3x - 2 = 0.$$

Donc :

$$-17 = 0.$$

Cette égalité est impossible. L'équation n'a donc aucune solution. La bonne réponse est **C**.

**Question 9.** On simplifie :

$$E = \frac{3 \times 2^4}{24 \times 2^2}.$$

Comme $2^4 = 16$ et $2^2 = 4$, on obtient :

$$E = \frac{3 \times 16}{24 \times 4} = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}.$$

La bonne réponse est **A**.

# Corrigé détaillé de la deuxième partie

## Exercice 1 6 points

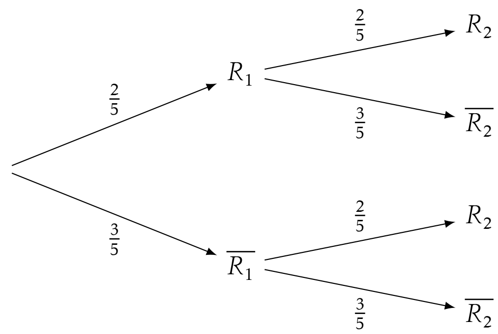
On rappelle que l'urne contient 5 boules : 2 rouges et 3 vertes. Les tirages sont effectués **avec remise**. Les probabilités restent donc les mêmes au premier et au deuxième tirage :

$$P(R) = \frac{2}{5}, \qquad P(V) = \frac{3}{5}.$$

**Partie A**

**1. Arbre pondéré.**

Comme il y a remise après le premier tirage, la composition de l'urne ne change pas. On obtient donc l'arbre suivant :




**2.a. Valeurs prises par $X$.**

Le joueur paie toujours 2 euros pour jouer.

— S'il tire deux boules rouges, il reçoit 5 euros. Son gain algébrique est donc :

$$5 - 2 = 3.$$

— S'il tire deux boules vertes, il reçoit 3 euros. Son gain algébrique est donc :

$$3 - 2 = 1.$$

— Dans les autres cas, il ne reçoit rien. Son gain algébrique est donc :

$$0 - 2 = -2.$$

Ainsi, les valeurs prises par $X$ sont :

$$\boxed{-2,\ 1,\ 3}.$$

**2.b. Calcul de $P(X = -2)$.**

L'évènement $X = -2$ correspond au cas où les deux boules tirées ne sont pas de la même couleur : rouge puis verte ou verte puis rouge.

Donc :

$$P(X = -2) = P(RV) + P(VR).$$

Avec l'arbre :

$$P(RV) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}, \qquad P(VR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}.$$

Ainsi :

$$P(X = -2) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

**2.c. Loi de probabilité de $X$.**

On calcule les trois probabilités :

$$P(X = 3) = P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25},$$

$$P(X=1)=P(VV)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25},$$
$$P(X=-2)=\frac{12}{25}.$$

On obtient la loi de probabilité suivante :

| $k$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{12}{25}$ | $\frac{9}{25}$ | $\frac{4}{25}$ |

On vérifie bien que :

$$\frac{12}{25}+\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\frac{25}{25}=1.$$

**2.d. Espérance de $X$.**

Par définition :

$$E(X)=\sum k\times P(X=k).$$

Donc :

$$E(X)=(-2)\times\frac{12}{25}+1\times\frac{9}{25}+3\times\frac{4}{25}.$$

Ainsi :

$$E(X)=\frac{-24+9+12}{25}=\frac{-3}{25}=-0{,}12.$$

L'espérance est négative. Cela signifie que, sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 0,12 euro par partie.

**Partie B**

L'urne contient maintenant $n$ boules rouges et $5-n$ boules vertes. Comme il y a 5 boules au total :

$$P(R)=\frac{n}{5},\qquad P(V)=\frac{5-n}{5}.$$

**1. Expression de $E(Y)$.**

Les gains algébriques possibles restent les mêmes :

3 pour deux rouges, 1 pour deux vertes, $-2$ dans les autres cas.

Une méthode directe consiste à raisonner avec les sommes reçues. Le joueur reçoit 5 euros dans le cas $RR$, 3 euros dans le cas $VV$, puis il paie toujours 2 euros. Donc :

$$E(Y)=5P(RR)+3P(VV)-2.$$

Or :

$$P(RR)=\left(\frac{n}{5}\right)^2,\qquad P(VV)=\left(\frac{5-n}{5}\right)^2.$$

Donc :

$$E(Y)=5\left(\frac{n}{5}\right)^2+3\left(\frac{5-n}{5}\right)^2-2.$$

On met au même dénominateur :

$$E(Y)=\frac{5n^2}{25}+\frac{3(5-n)^2}{25}-2.$$

Comme $2=\frac{50}{25}$, on obtient :

$$E(Y)=\frac{5n^2+3(5-n)^2-50}{25}.$$

On développe :

$$(5-n)^2=25-10n+n^2.$$

Donc :

$$5n^2+3(5-n)^2-50=5n^2+3(25-10n+n^2)-50.$$

Ainsi :

$$5n^2 + 75 - 30n + 3n^2 - 50 = 8n^2 - 30n + 25.$$

Finalement :

$$\boxed{E(Y) = \frac{8n^2 - 30n + 25}{25}}.$$

**2. Valeurs de $n$ pour lesquelles le jeu est favorable.**

Le jeu est favorable au joueur lorsque :

$$E(Y) > 0.$$

Comme $25 > 0$, cela équivaut à :

$$8n^2 - 30n + 25 > 0.$$

On factorise :

$$8n^2 - 30n + 25 = (2n - 5)(4n - 5).$$

On étudie donc le signe du produit :

$$(2n - 5)(4n - 5) > 0.$$

Les deux facteurs s'annulent pour :

$$2n - 5 = 0 \iff n = \frac{5}{2},$$
$$4n - 5 = 0 \iff n = \frac{5}{4}.$$

Le produit est strictement positif à l'extérieur des deux racines :

$$n < \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad n > \frac{5}{2}.$$

Comme $n$ est un entier compris entre 0 et 5, on teste les entiers possibles :

$$n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Les entiers qui vérifient l'inégalité sont :

$$\boxed{n \in \{0; 1; 3; 4; 5\}}.$$

Le jeu n'est pas favorable pour $n = 2$. Il est favorable pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.

## Exercice 2 — 4 points

**Partie A**

**1. Lecture graphique de $f(15)$.**

Sur le graphique, à l'abscisse $x = 15$, la courbe atteint environ la valeur 10 sur l'axe des ordonnées. On lit donc :

$$\boxed{f(15) \approx 10}.$$

Dans le contexte, cela signifie qu'à 15 h, le débit de remplissage du récupérateur est d'environ 10 litres par heure.

**2. Résolution graphique de $f(x) \geq 6$.**

On cherche les heures pour lesquelles la courbe est au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 6$.

Graphiquement, la courbe coupe le niveau 6 environ aux abscisses 12 et 18. La courbe est au-dessus de 6 entre ces deux valeurs. Donc :

$$\boxed{x \in [12; 18]}.$$

Dans le contexte, le débit est au moins égal à 6 litres par heure entre environ 12 h et 18 h, soit pendant environ 6 heures.

**Partie B**

**1. Nature de la suite $(c_n)$.**

Le prix augmente de 4 % chaque année. Augmenter de 4 % revient à multiplier par :

$$1 + \frac{4}{100} = 1{,}04.$$

Ainsi :

$$c_{n+1} = 1{,}04c_n.$$

La suite $(c_n)$ est donc une suite géométrique de premier terme :

$$c_0 = 3{,}20$$

et de raison :

$$q = 1{,}04.$$

**2. Expression de $c_n$ en fonction de $n$.**

Pour une suite géométrique de premier terme $c_0$ et de raison $q$, on a :

$$c_n = c_0 q^n.$$

Donc :

$$\boxed{c_n = 3{,}20 \times 1{,}04^n}.$$

**3. Prix en 2032.**

L'année $2021 + n$ correspond à 2032 lorsque :

$$2021 + n = 2032.$$

Donc :

$$n = 11.$$

Le calcul permettant d'obtenir le prix en 2032 est donc :

$$\boxed{c_{11} = 3{,}20 \times 1{,}04^{11}}.$$

On peut donner une valeur approchée :

$$c_{11} \approx 4{,}93.$$

Le prix d'un mètre cube d'eau en 2032 serait donc environ 4,93 euros.

**4. Interprétation du programme.**

Le programme est :

```
n = 0
c = 3.20
S = 0
while S < 950 :
  S = S + 18*c
  n = n+1
  c = 1.04*c
print(n)
```

La variable $c$ représente le prix d'un mètre cube d'eau pour l'année considérée. La variable $S$ représente l'économie totale cumulée depuis l'installation du récupérateur.

Chaque année, le récupérateur évite l'achat de 18 m$^3$ d'eau. L'économie annuelle est donc :

$$18c.$$

À chaque passage dans la boucle, on ajoute cette économie à $S$ :

$$S \leftarrow S + 18c.$$

Puis on passe à l'année suivante :

$$n \leftarrow n + 1, \qquad c \leftarrow 1{,}04c.$$

Si le programme affiche 13, cela signifie qu'il faut 13 années pour que les économies cumulées atteignent ou dépassent le coût de l'installation, c'est-à-dire 950 euros.

L'installation est donc rentabilisée au bout de 13 années.

## Exercice 3 — 4 points

On considère :

$$f(x) = (6x - 12)e^{-0,25x} + 4.$$

**1. Calcul de la dérivée.**

On pose :

$$u(x) = 6x - 12 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-0,25x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 6 \quad \text{et} \quad v'(x) = -0,25e^{-0,25x}.$$

Comme $f(x) = u(x)v(x) + 4$, on utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Donc :

$$f'(x) = 6e^{-0,25x} + (6x - 12)(-0,25)e^{-0,25x}.$$

On factorise par $e^{-0,25x}$ :

$$f'(x) = [6 - 0,25(6x - 12)]\,e^{-0,25x}.$$

Or :

$$0,25(6x - 12) = 1,5x - 3.$$

Ainsi :

$$6 - 0,25(6x - 12) = 6 - (1,5x - 3) = 9 - 1,5x.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = (-1,5x + 9)e^{-0,25x}}.$$

**2. Signe de $f'(x)$ et variations de $f$.**

Pour tout réel $x$ :

$$e^{-0,25x} > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de :

$$-1,5x + 9.$$

On résout :

$$-1,5x + 9 = 0 \iff -1,5x = -9 \iff x = 6.$$

Ainsi :

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 6,$$
$$f'(6) = 0,$$
$$f'(x) < 0 \text{ si } x > 6.$$

On en déduit que $f$ est croissante sur $]-\infty; 6]$ puis décroissante sur $[6; +\infty[$.

La valeur maximale est atteinte pour $x = 6$ :

$$f(6) = (6 \times 6 - 12)e^{-0,25\times 6} + 4.$$

Donc :

$$f(6) = 24e^{-1,5} + 4.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $24e^{-1,5} + 4$ | $\searrow$ | |

**3. Tangente horizontale.**

Une tangente est horizontale lorsque le nombre dérivé est nul, c'est-à-dire lorsque :

$$f'(x) = 0.$$

On a montré que :

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 6.$$

Il existe donc une tangente horizontale au point d'abscisse 6.
L'ordonnée exacte du point est :

$$f(6) = 24e^{-1,5} + 4.$$

Le point correspondant est donc :

$$\boxed{\left(6;\ 24e^{-1,5} + 4\right)}.$$