SUJET 1

Épreuve anticipée de première - Candidats ayant suivi la spécialité

Durée conseillée : 2 heures

Première partie : Automatismes - QCM — 6 points

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée. Une seule réponse est correcte par question. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne retire aucun point.

Question 1. Le nombre $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \times 6$ est égal à :

A. $\frac{33}{4}$ **B.** $\frac{63}{4}$ **C.** $\frac{39}{4}$ **D.** 18

Question 2. La partie visible d'un iceberg représente environ 12 % de son volume total. Si la partie visible vaut 96 km^3, le volume total est :

A. 800 km^3 **B.** 1 152 km^3 **C.** 84 km^3 **D.** 1 200 km^3

Question 3. Le prix d'un article est multiplié par 0,78. Cela signifie que le prix a :

A. augmenté de 78 % **B.** baissé de 22 % **C.** baissé de 0, 22 % **D.** augmenté de 22 %

Question 4. On considère la fonction A définie pour tout réel x par :

$$A(x) = (4 - 2x)(3x + 12).$$

Le tableau de signes de $A(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

A.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

B.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

C.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Question 5. On choisit au hasard une lettre du mot MATHS. Sachant que la lettre choisie est dans le mot MATHS, la probabilité qu'elle soit une voyelle vaut :

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{6}{26}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Question 6. Une fonction affine f est représentée par une droite passant par $(0; 24)$ et $(4; 0)$. Une expression de f est :

A. $f(x) = -6x + 24$ **B.** $f(x) = 6x + 24$ **C.** $f(x) = -24x + 4$ **D.** $f(x) = -\frac{1}{6}x + 24$

Question 7. La forme développée et réduite de $(x+3)^2 - (2-x)^2$ est :

A. $2x^2 + 10x + 5$ **B.** $10x + 5$ **C.** $2x + 5$ **D.** $x^2 + 5$

Question 8. L'équation $3(x-5) - (3x+2) = 0$ admet :

A. une solution : 5 **B.** une solution : $-\frac{2}{3}$ **C.** aucune solution **D.** une infinité de solutions

Question 9. Le nombre $E = \dfrac{3 \times 2^4}{24 \times 2^2}$ est égal à :

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{1}{6}$

Deuxième partie 14 points

Exercice 1 6 points

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher. Chaque boule est soit rouge, soit verte. Un jeu est proposé : pour participer, le joueur paie 2 euros. Il effectue ensuite deux tirages successifs avec remise.

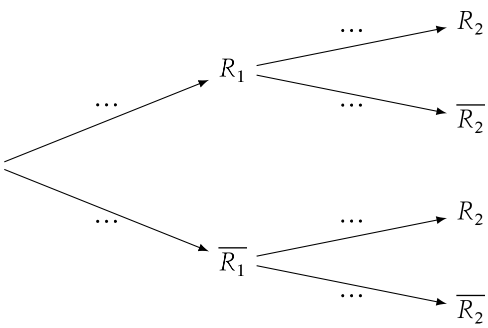
Le joueur reçoit :

— 5 euros s'il tire deux boules rouges ;
— 3 euros s'il tire deux boules vertes ;
— rien sinon.

On appelle gain algébrique la somme reçue diminuée du prix de participation.

Partie A. Dans cette partie, l'urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On note R_1 l'évènement « la première boule est rouge » et R_2 l'évènement « la deuxième boule est rouge ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Donner les valeurs prises par X.

b. Montrer que $P(X = -2) = \dfrac{12}{25}$.

c. Compléter la loi de probabilité de X.

k			
$P(X = k)$			

d. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Partie B. L'urne contient maintenant n boules rouges et $5 - n$ boules vertes, où n est un entier compris entre 0 et 5. On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

1. Démontrer que

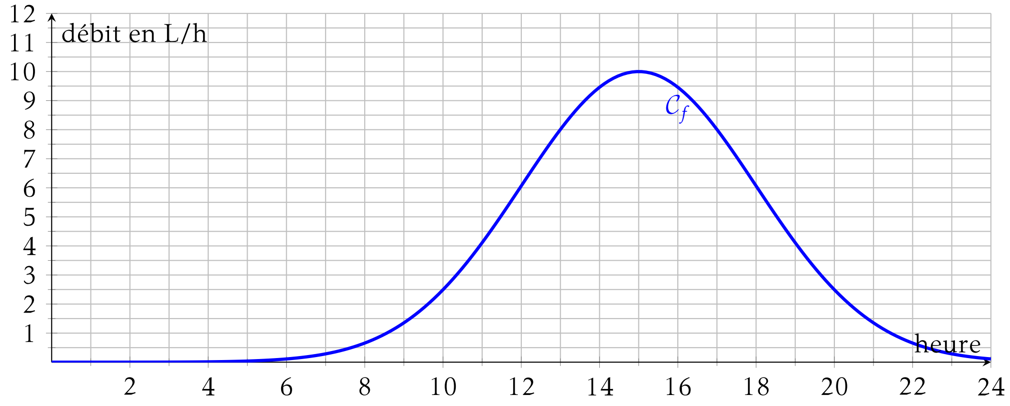
$$E(Y) = \frac{8n^2 - 30n + 25}{25}.$$

2. Pour quelles valeurs entières de n le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire lorsque $E(Y) > 0$?

Exercice 2 4 points

Pour suivre sa consommation d'eau, Nora installe un récupérateur d'eau de pluie.

Partie A. Lors d'une journée pluvieuse, le débit de remplissage du récupérateur, en litres par heure, est modélisé par une fonction f définie sur $[0; 24]$. Sa courbe est donnée ci-dessous.



Avec la précision permise par le graphique :

1. Donner le débit à 15 h.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 6$ et interpréter dans le contexte.

Partie B. En 2021, le prix d'un mètre cube d'eau était 3,20 euros. Il augmente de 4 % par an. On note c_n le prix d'un mètre cube en 2021 + n.

1. Déterminer la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.
2. Exprimer c_n en fonction de n.
3. Donner le calcul permettant d'obtenir le prix en 2032.
4. Chaque année, le récupérateur évite l'achat de 18 m^3 d'eau. L'installation coûte 950 euros. On considère le programme :

```
n = 0
c = 3.20
S = 0
while S < 950 :
  S = S + 18*c
  n = n+1
  c = 1.04*c
print(n)
```

Que représentent les variables c et S ? Si le programme affiche 13, interpréter ce résultat.

Exercice 3 — 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x - 12)e^{-0,25x} + 4.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout réel x,
$$f'(x) = (-1,5x + 9)e^{-0,25x}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. La courbe représentative de f admet-elle une tangente horizontale ? Si oui, préciser l'abscisse et l'ordonnée exacte du point correspondant.