Révision Bac – 1re Spécialité Mathématiques – Exercices

Calculatrice interdite

Partie 1 : Calculs, équations et inéquations, ensembles de définition

Exercice 1. Résoudre une équation du premier degré.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$4x - 28 = 0.$$

b) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{2x+9}{4x-28}.$$
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 2. Résoudre une équation du second degré.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2x^2 - 14x + 24 = 0.$$

b) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{5x-1}{2x^2-14x+24}.$$
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 3. Résoudre une inéquation du premier degré.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$12 - 3x \geq 0.$$

b) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sqrt{12-3x}.$$
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 4. Résoudre une inéquation du second degré.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$-x^2 + 9x - 20 \geq 0.$$

b) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sqrt{-x^2+9x-20}.$$
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 5. Résoudre une inéquation de degré supérieur.

a) Construire sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes du produit :
$$(3x-12)(-2x+10)(4x+8).$$

b) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sqrt{(3x-12)(-2x+10)(4x+8)}.$$
En déduire son ensemble de définition.

Exercice 6. Simplifier une expression avec une exponentielle.

Simplifier :

$$\frac{e^{2x+3}(e^{x-1})^4}{e^{3x+5}}.$$

Exercice 7. Résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$e^{-3x+4} \geq e^{x+12}.$$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{2x} - 7e^x + 10 = 0.$$

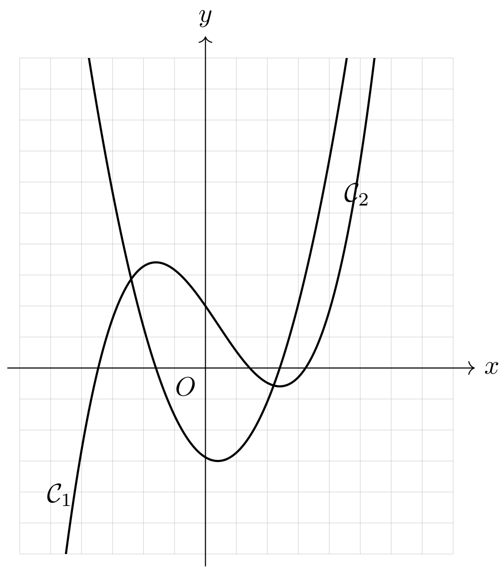
c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$3e^{-2x+5} - 3 > 0.$$

Partie 2 : Fonctions

Exercice 8. Lire graphiquement des informations.

On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f et de sa dérivée f'. Identifier chacune des deux courbes.



Exercice 9. Exploiter un tableau de variations.

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-8		0		3		9
$f(x)$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	8

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

a) La fonction f est strictement monotone sur $[0;3]$.
b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $[-8;9]$.
c) 7 a exactement deux antécédents par f sur $[-8;9]$.
d) La fonction f s'annule trois fois sur $[-8;9]$.

Exercice 10. Déterminer l'expression de la fonction dérivée.

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$. Aucune justification n'est attendue.

a) $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x - 4$
b) $f(x) = 4x + \dfrac{2}{x}$
c) $f(x) = 3x^2 - 5$
d) $f(x) = 5x - 8$
e) $f(x) = (6x - 5)^2$
f) $f(x) = (-4x + 3)^3$

Exercice 11. Connaître la formule de l'équation réduite de la tangente.

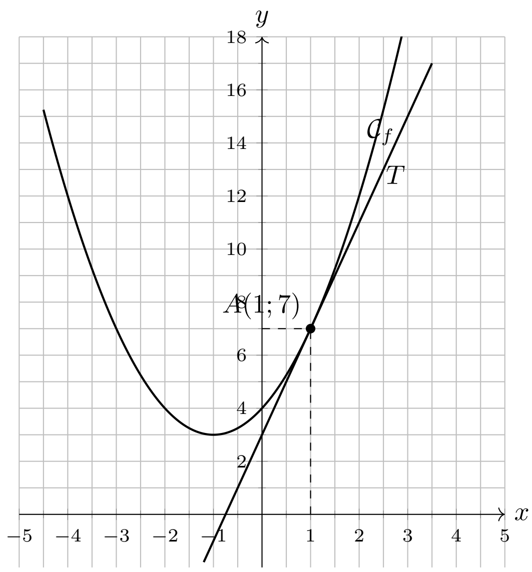
On représente ci-dessous la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

ainsi que la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Le point de tangence est :

$$A(1; 7).$$



a) Calculer $f'(x)$.
b) À l'aide de la formule du cours, déterminer l'équation réduite de la tangente T.
c) Vérifier que vous avez obtenu le bon coefficient directeur et la bonne ordonnée à l'origine à l'aide de lectures graphiques.

Exercice 12. Déterminer les variations d'une fonction.

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de f. On donnera les ensembles de définition et de dérivabilité de f, une expression de $f'(x)$, le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5x + 1}$
3. $f(x) = e^{-4x^2+8x}$
4. $f(x) = (3x - 4)e^{-2x+1}$
5. $f(x) = 3e^{-x+2} - 5x + 1$

Partie 3 : Probabilités

Exercice 13. Utiliser un arbre pondéré.

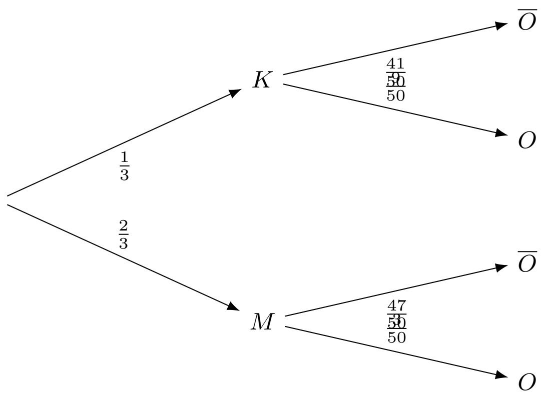
D'après une étude, il y a 200 000 médecins en France métropolitaine, parmi lesquels 6% pratiquent l'ostéopathie.

On compte aussi 100 000 kinésithérapeutes, parmi lesquels 18% pratiquent l'ostéopathie.

On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.

On note :

M : la personne choisie est médecin,
K : la personne choisie est kinésithérapeute,
O : la personne choisie pratique l'ostéopathie.



1. Justifier que $P(M) = \dfrac{2}{3}$, puis compléter l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(K \cap O)$.
3. Montrer que $P(O) = \dfrac{1}{10}$.
4. Un patient vient ensuite voir une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories. Quelle est la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute ? Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 14. Tableau d'effectifs.

Un restaurant propose dans son menu trois formules :

Formule A : entrée + plat
Formule B : plat + dessert
Formule C : entrée + plat + dessert

	Formule A	Formule B	Formule C	Total
Déjeuner M	24	35	21	80
Dîner S	18	22	?	100
Total	42	57	81	180

On choisit un client au hasard.

1. Quel effectif doit-on écrire dans la case vide du tableau ?
2. Déterminer $P(B \cap M)$.
3. Quelle est la probabilité que le client soit venu pour déjeuner ?
4. Déterminer $P(B \cup M)$. Interpréter ce résultat.
5. Quelle est la probabilité que le client ait choisi la formule A sachant qu'il est venu pour déjeuner ?
6. Déterminer $P(S)$. Interpréter ce résultat.
7. La restauratrice déclare : « J'ai une carte des desserts très attractive car plus de trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert. » A-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 15. Utiliser la loi d'une variable aléatoire.

Un commercial vend entre 0 et 4 pompes à chaleur d'un modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de pompes à chaleur vendues.

Nombre de pompes vendues	0	1	2	3	4
Probabilité	0,28	0,23	a	0,15	0,05

1. Déterminer la valeur de a, puis la probabilité de vendre au moins deux pompes à chaleur en une semaine.

2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Calculer la variance de X et donner l'écart-type sous forme exacte.
4. Expliquer pourquoi l'algorithme ci-dessous permet de calculer $E(X)$.

```
E ← 0
Pour i allant de 0 à 4 faire
  E ← E + i × P(X = i)
Fin Pour
Afficher E
```

Exercice 16. Problème d'après ES Amérique du Sud novembre 2012.

Pierre pratique la course à pied chaque semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C, et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E, et Vitesse, notée V.

Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V). Pierre va courir une fois par semaine.

On considère les événements suivants :

A : Pierre choisit le parcours A, B : Pierre choisit le parcours B, C : Pierre choisit le parcours C,

E : Pierre choisit une séance d'endurance, V : Pierre choisit une séance de vitesse.

On sait que :

— Pierre choisit le parcours A dans 30% des cas et le parcours B dans 20% des cas ;
— si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 50% des cas ;
— si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 70% des cas ;
— si Pierre choisit le parcours C, alors il fait une séance d'endurance dans 60% des cas.

1. Faire un arbre pondéré décrivant la situation ci-dessus.
2. Donner la valeur de $P_A(E)$ puis celle de $P_A(V)$.
3. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance d'endurance.
4. Calculer $P(C \cap E)$, puis montrer que $P(E) = 0{,}59$.
5. Pierre choisit le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?
6. Les événements E et C sont-ils indépendants ?
7. Le club de Pierre attribue des points en fonction des parcours effectués : 12 points pour le parcours A, 18 points pour le parcours B et 30 points pour le parcours C. Il gagne également 15 points s'il choisit une séance d'endurance et 8 points pour une séance de vitesse. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points gagné par Pierre.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Sur un an, soit 40 semaines, combien Pierre peut-il espérer gagner de points ?

Partie 4 : Suites numériques, arithmétiques et géométriques

Exercice 17. Calculer les termes d'une suite définie par une relation explicite.

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4n^2 + 2.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 18. Démontrer que tous les termes d'une suite sont des multiples de 3.

Soit (u_n) définie par :

$$u_n = (3n + 2)^2 + 2.$$

En développant l'expression de u_n, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 3.

Exercice 19. Émettre une conjecture sur les variations d'une suite.

On considère une suite (u_n) telle que :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = 9, \quad u_2 = 12, \quad u_3 = 20, \quad u_4 = 21.$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.
b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.
c) On peut affirmer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 20. Déterminer les variations d'une suite.

Soit (u_n) définie par :

$$u_n = 3n - 7.$$

En calculant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 21. Calculer les termes d'une suite définie par récurrence.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = 3u_n - 1.$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 22. Manipuler une suite arithmétique ou géométrique.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 4$. Déterminer son quatrième terme, sa formule de récurrence et sa formule générale.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Déterminer son quatrième terme, sa formule de récurrence et sa formule générale.

Exercice 23. Suite arithmétique.

Claire décide de donner 15 euros à son petit-fils Paul pour son anniversaire puis d'augmenter de 6 euros le montant offert d'une année sur l'autre.

On suppose que Paul a actuellement 8 ans.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le montant, en euros, versé par Claire pour l'anniversaire de Paul dans n ans. Ainsi :

$$u_0 = 15.$$

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Donner une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire la nature de la suite (u_n).
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Quelle somme Paul recevra-t-il pour ses 12 ans ?
6. Quelle somme aura-t-il reçue au total jusqu'à ses 18 ans inclus ?

Exercice 24. Écrire un algorithme calculant les termes consécutifs d'une suite définie par récurrence.

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = 3u_n - 1.$$

Algorithme	Valeur de V
$V \leftarrow 2$	2
Pour I allant de 1 à 4	
$V \leftarrow 3V - 1$	
Fin Pour	
Afficher V	

Exercice 25. Problème sur une suite arithmético-géométrique.

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de pollution. Le centre accueille 120 oiseaux. Les spécialistes prévoient que 50% des oiseaux présents au 1^er janvier d'une année resteront présents le 1^er janvier suivant et que 80 oiseaux nouveaux seront accueillis chaque année.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre d'oiseaux présents au 1^er janvier de l'année $2013 + n$:

$$u_0 = 120, \qquad u_{n+1} = 0{,}5u_n + 80.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n - 160.$$

   Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,5.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
5. En déduire :

$$u_n = 160 - 40 \times 0{,}5^n.$$

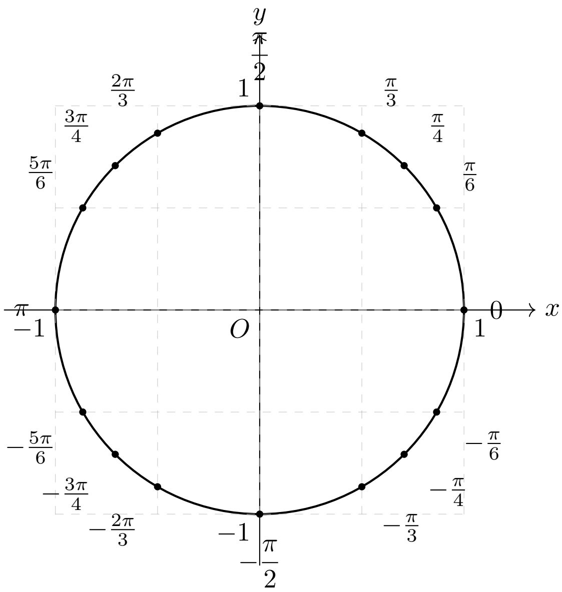
6. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
7. La capacité d'accueil du centre est de 160 oiseaux. Est-ce suffisant ?
8. On veut savoir quand le nombre d'oiseaux aura dépassé 150. Compléter l'algorithme ci-dessous.

$U \leftarrow 120$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U \leq 150$ **faire**
  $U \leftarrow 0{,}5U + 80$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

Partie 5 : Géométrie, trigonométrie, droites, produit scalaire

Exercice 26. Trigonométrie : cercle trigonométrique et valeurs remarquables.

I. Compléter le cercle trigonométrique



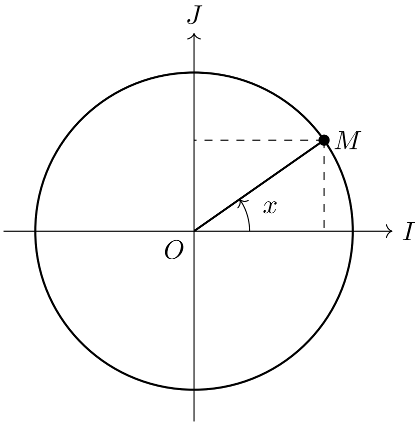
II. Déterminer les valeurs suivantes

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
2) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
5) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
7) $\cos(\pi)$
8) $\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

III. Résoudre les équations suivantes

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; \pi]$
3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
4. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 0]$
5. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$
6. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$
7. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$
8. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$
9. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 0]$
10. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; 2\pi]$

IV. Simplifier à l'aide du schéma ci-dessous



1. $\cos(-x)$
2. $\sin(-x)$
3. $\cos(\pi - x)$
4. $\sin(\pi - x)$
5. $\cos(\pi + x)$
6. $\sin(\pi + x)$
7. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
8. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Équations de droites

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right).$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Une droite d'équation :

$$ax + by + c = 0$$

admet comme vecteur directeur :

$$\vec{u}(-b; a)$$

et comme vecteur normal :

$$\vec{n}(a; b).$$

Une équation du cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Exercice 27. Appliquer le cours sur les équations de droites.

I. Droite d'équation cartésienne

Soit (d) la droite d'équation :

$$4x - 3y + 6 = 0.$$

1. Le point $A(1; 2)$ appartient-il à (d) ?
2. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 4 appartenant à (d).
3. Déterminer les coordonnées du point B appartenant à l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point C appartenant à l'axe des ordonnées.

5. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).
6. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de (d).

II. Droite d'équation réduite

Soit (d') la droite d'équation :

$$y = -2x + 5.$$

7. Le point $A(1;2)$ appartient-il à (d') ?
8. Déterminer les coordonnées du point D d'abscisse 4 appartenant à (d').
9. Déterminer les coordonnées du point B de (d') appartenant à l'axe des abscisses.
10. Déterminer les coordonnées du point C de (d') appartenant à l'axe des ordonnées.
11. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d').
12. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de (d').

III. Positions relatives de deux droites

13. Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ? On utilisera le déterminant.
14. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (d) et (d').

IV. Projeté orthogonal et cercle

Soient :

$$A(-1;2) \qquad \text{et} \qquad B(5;-4).$$

15. Déterminer une équation cartésienne de (AB).
16. En déduire l'équation réduite de (AB).
17. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) perpendiculaire à (AB) et passant par le point $C(2;3)$.
18. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
19. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
20. Déterminer une équation du cercle de centre H et passant par C.

Exercice 28. Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule avec les normes et le cosinus.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 6, \qquad \|\vec{v}\| = 3, \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}.$$

Calculer le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Exercice 29. Faire le lien entre orthogonalité et résultat d'un produit scalaire.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère un rectangle $ABCD$.
Sans faire aucun calcul, déterminer :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD}.$$

Exercice 30. Montrer une orthogonalité à l'aide du produit scalaire.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$$A(1;1), \qquad B(2;4), \qquad C(3;2).$$

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
b) En calculant le produit scalaire avec la formule des coordonnées, prouver que :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0.$$

c) Que peut-on dire des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$? Que peut-on en déduire sur les droites (AC) et (BC) ?

Exercice 31. Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}(-2;5) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(4;-\frac{3}{2}\right).$$

a) Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, ainsi que les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b) En utilisant la formule avec le cosinus, déterminer la valeur de :

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$

c) Sans calculatrice, en déduire si l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu, droit ou obtus. Justifier.