Mini fiche de révision

Bac – Première spécialité mathématiques

Vecteurs, second degré, suites, dérivées, exponentielle, probabilités et pourcentages

1. Vecteurs dans le plan

Soient deux points :

$$A(x_A; y_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B; y_B)$$

Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

La norme du vecteur, c'est-à-dire la distance AB, est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Colinéarité

Soient :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si :

$$xy' - yx' = 0$$

On peut aussi écrire :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Donc :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

Applications :

— montrer que trois points sont alignés ;

— montrer que deux droites sont parallèles.

3. Orthogonalité et produit scalaire

Soient :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Les vecteurs sont orthogonaux si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Donc :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

Application : montrer que deux droites sont perpendiculaires.

4. Droites dans le plan

Équation réduite :

$$y = ax + b$$

où a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
Si la droite passe par :

$$A(x_A; y_A) \qquad \text{et} \qquad B(x_B; y_B)$$

avec $x_A \neq x_B$, alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

Un vecteur normal est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur est :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

5. Cercle

Un cercle de centre :

$$\Omega(x_0; y_0)$$

et de rayon r a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Exemple :
Si $\Omega(2; 3)$ et $r = 5$, alors :

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

6. Polynôme du second degré

Un trinôme du second degré s'écrit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Racines :

$$\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \Longrightarrow x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \Longrightarrow \text{aucune racine réelle}$$

Sommet de la parabole :
Le sommet $S(\alpha; \beta)$ est donné par :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Donc :

$$S\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Factorisation :
Si $\Delta > 0$:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta = 0$:

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

7. Signe d'un trinôme

Si $\Delta > 0$:
Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé de a entre les racines.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

Si $\Delta = 0$:
Le trinôme garde le signe de a, sauf en x_0, où il vaut 0.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

Si $\Delta < 0$:
Le trinôme garde toujours le signe de a.

8. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique si on ajoute toujours le même nombre r.

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est la raison.
Formules :
Si la suite commence à u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

Si la suite commence à u_1 :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Formule générale :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Somme des termes consécutifs :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

9. Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique si on multiplie toujours par le même nombre q.

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q est la raison.
Formules :
Si la suite commence à u_0 :

$$u_n = u_0 q^n$$

Si la suite commence à u_1 :

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

Formule générale :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Somme des termes consécutifs, si $q \neq 1$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Cas particulier :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

10. Dérivées – Formules essentielles

Nombre dérivé :
Le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Tangente :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Formules de base :

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x

Opérations :

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \text{avec } v(x) \neq 0$$

$$(u(x)^n)' = nu'(x)u(x)^{n-1}$$

11. Fonction exponentielle

La fonction exponentielle vérifie :

$$(e^x)' = e^x$$

Elle est toujours strictement positive :

$$e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exponentielle composée :
Si :

$$f(x) = e^{u(x)}$$

alors :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemple 1 :

$$f(x) = e^{3x+1}$$

Alors :

$$f'(x) = 3e^{3x+1}$$

Exemple 2 :

$$f(x) = xe^x$$

On utilise la dérivée d'un produit :

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$$

Donc :

$$f'(x) = e^x(1 + x)$$

Exemple 3 :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \qquad \text{avec } x \neq 0$$

On utilise la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

12. Variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f, on étudie le signe de sa dérivée $f'(x)$.

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f \text{ est croissante}$$

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow f \text{ est décroissante}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \text{point critique possible}$$

Méthode :

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$ si possible.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Construire le tableau de variations.
5. Calculer les valeurs importantes.

Exemple :
Soit :

$$f(x) = (x-2)e^x$$

Alors :

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x$$

$$f'(x) = e^x(x-1)$$

Comme :

$$e^x > 0$$

le signe de $f'(x)$ dépend de $x - 1$.
Donc :

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; 1[$$

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]1; +\infty[$$

Ainsi, f est décroissante puis croissante, avec un minimum en $x = 1$.

$$f(1) = (1-2)e^1 = -e$$

13. Probabilités – Formules essentielles

Soit A un événement.

Probabilité contraire :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Réunion et intersection :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Événements incompatibles :

Si $A \cap B = \varnothing$, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilité conditionnelle :

Si $P(A) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Formule des probabilités totales :

Si A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, alors :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Donc :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Indépendance :

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ou encore, si $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = P(B)$$

14. Arbre pondéré – Exemple expliqué

Dans un groupe de préparation au bac, 60% des élèves ont fait au moins trois sujets blancs.
Parmi eux, $\frac{5}{6}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12.
Parmi les autres élèves, $\frac{1}{4}$ obtiennent une note supérieure ou égale à 12.
On note :

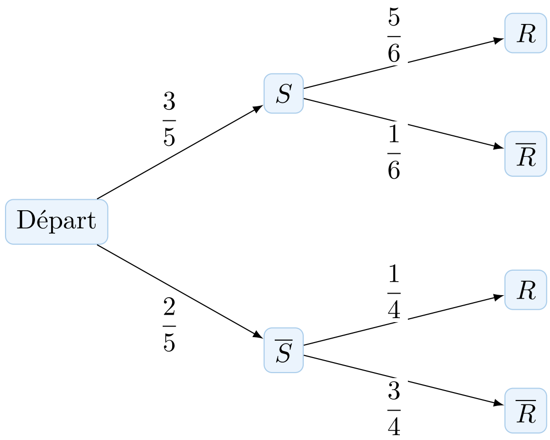
$$S : \text{l'élève a fait au moins trois sujets blancs}$$

$$R : \text{l'élève obtient une note supérieure ou égale à 12}$$

On a donc :

$$P(S) = 0{,}60 = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{S}) = 0{,}40 = \frac{2}{5}$$

$$P_S(R) = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{S}}(R) = \frac{1}{4}$$



Règle importante :
Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches.

$$P(S \cap R) = P(S) \times P_S(R)$$

Donc :

$$P(S \cap R) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

Cela signifie que 50% des élèves ont fait au moins trois sujets blancs et ont obtenu une note supérieure ou égale à 12.
Deuxième chemin :

$$P(\overline{S} \cap R) = P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(R)$$

$$P(\overline{S} \cap R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}10$$

Probabilité totale de réussir :

$$P(R) = P(S \cap R) + P(\overline{S} \cap R)$$

$$P(R) = 0{,}50 + 0{,}10 = 0{,}60$$

Donc 60% des élèves obtiennent une note supérieure ou égale à 12.

15. Pourcentages – Coefficient multiplicateur et taux

Attention aux notations :

$$t = \text{taux décimal}$$

$$T = \text{taux en pourcentage}$$

Par exemple, une hausse de 20% correspond à :

$$T = 20 \qquad \text{et} \qquad t = 0{,}20$$

Coefficient multiplicateur :
Si le taux décimal est t, alors :

$$CM = 1 + t$$

Si le taux en pourcentage est T, alors :

$$CM = 1 + \frac{T}{100}$$

Taux de variation :
Si une valeur passe de V_i à V_f, alors :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

Le taux en pourcentage est :

$$T = t \times 100$$

Donc :

$$T = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$$

Valeur finale :

$$V_f = V_i \times CM$$

Valeur initiale :

$$V_i = \frac{V_f}{CM}$$

16. Coefficient multiplicateur global et taux réciproque

Coefficient multiplicateur global :
Pour plusieurs évolutions successives :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$$

Taux global en pourcentage :

$$T_{\text{global}} = (CM_{\text{global}} - 1) \times 100$$

Taux réciproque :
Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{CM}$$

Le taux réciproque en pourcentage est :

$$T_{\text{réciproque}} = \left(\frac{1}{CM} - 1\right) \times 100$$

Exemple :
Une hausse de 20% correspond à :

$$CM = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}20$$

Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1{,}20}$$

$$CM_{\text{réciproque}} \approx 0{,}8333$$

Donc :

$$T_{\text{réciproque}} = (0{,}8333 - 1) \times 100$$

$$T_{\text{réciproque}} \approx -16{,}67\%$$

Il faut donc une baisse d'environ 16,67% pour annuler une hausse de 20%.

17. Tableau final des formules à retenir – Partie 1

Thème	Formule importante
Vecteur	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Distance	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Colinéarité	$xy' - yx' = 0$
Orthogonalité	$xx' + yy' = 0$
Droite	$y = ax + b$
Coefficient directeur	$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
Cercle	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Second degré	$\Delta = b^2 - 4ac$
Sommet	$S\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$
Suite arithmétique	$u_n = u_0 + nr$
Suite géométrique	$u_n = u_0 q^n$
Tangente	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

18. Tableau final des formules à retenir – Partie 2

Thème	Formule importante
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Exponentielle	$(e^x)' = e^x$
Exponentielle composée	$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$
Probabilité contraire	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Probabilité conditionnelle	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$
Arbre pondéré	La probabilité d'un chemin se calcule en multipliant les probabilités des branches.
Coefficient multiplicateur	$CM = 1 + t = 1 + \dfrac{T}{100}$
Taux de variation	$T = \dfrac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$
CM global	$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$
Taux global	$T_{\text{global}} = (CM_{\text{global}} - 1) \times 100$
Taux réciproque	$T_{\text{réciproque}} = \left(\dfrac{1}{CM} - 1\right) \times 100$

Conseil révision : apprendre les formules, puis refaire des exercices types Bac sans regarder la correction.