

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exercices corrigés

Exercice 1 - Colinearite et alignement

Dans le repere $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considere $A(1, 2, -1)$, $B(3, -1, 2)$ et $C(5, -4, 5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que A, B, C sont alignes.

Correction.

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (4, -6, 6) = 2 \overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs sont colineaires non nuls, donc A, B, C sont alignes.

Exercice 2 - Appartenance a une droite

On considere la droite

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Donner un point A de d .
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de d .
3. Verifier que $M(3, 1, 1)$ n'appartient pas a d .

Correction.

Pour $t = 0$, $A(1, -1, 3) \in d$. Le vecteur directeur est $\vec{u}(2, 1, -1)$.

Pour $M(3, 1, 1)$, on doit avoir

$$3 = 1 + 2t, \quad 1 = -1 + t, \quad 1 = 3 - t.$$

Les solutions sont $t = 1$, $t = 2$ et $t = 2$: pas de t commun, donc $M \notin d$.

Exercice 3 - Plan et equation cartesienne

Le plan $\mathcal{P}$ a pour equation $x - 2y + z + 1 = 0$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$.
2. Verifier que $A(1, 0, -2)$ appartient a $\mathcal{P}$.
3. Verifier que $B(2, 1, 1)$ n'appartient pas a $\mathcal{P}$.

Correction.

Un vecteur normal est $\vec{n}(1, -2, 1)$.

Pour $A(1, 0, -2)$:

$$1 - 2 \times 0 + (-2) + 1 = 0,$$

donc $A \in \mathcal{P}$.

Pour $B(2, 1, 1)$:

$$2 - 2 \times 1 + 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

donc $B \notin \mathcal{P}$.

Exercice 4 - Deux plans paralleles ou non

Soit $\mathcal{P} : 2x + 3y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

1. Donner un vecteur normal a chacun des plans.
2. Determiner leur position relative.

Correction.

$\mathcal{P} : \vec{n}_1(2, 3, -1)$; $\mathcal{Q} : \vec{n}_2(4, 6, -2) = 2\vec{n}_1$. Donc plans paralleles ou confondus.

On teste un point de $\mathcal{P}$, par exemple $M(1, 0, 1)$:

$$2 \times 1 + 3 \times 0 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

Pour $\mathcal{Q}$:

$$4 \times 1 + 6 \times 0 - 2 \times 1 + 3 = 5 \neq 0 \Rightarrow M \notin \mathcal{Q}.$$

Donc les plans sont strictement paralleles.

Exercice 5 - Coplanarite et base

On considere

$$\vec{u}(1, 0, 1), \quad \vec{v}(0, 1, 1), \quad \vec{w}(1, 1, 0).$$

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colineaires.
2. Montrer que $\vec{w}$ n'est pas combinaison lineaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. En deduire que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Correction.

- $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$ n'ont pas de rapport constant entre leurs coordonnees, donc ils ne sont pas colineaires.
- Supposons $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, alors

$$(1, 1, 0) = (\alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

On obtient

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \alpha + \beta = 0 \Rightarrow 2 = 0,$$

impossible. Donc $\vec{w}$ n'est pas combinaison de $\vec{u}, \vec{v}$.

- Il n'existe pas de relation lineaire non triviale entre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: ils sont lineairement independants et forment une base de l'espace.