

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Specialite mathematiques - Terminale

1 Repere de l'espace et vecteurs

1.1 Repere orthonorme de l'espace

On travaille dans un espace muni d'un **repere orthonorme** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Chaque point M est repere par ses **coordonnees** (x_M, y_M, z_M) .

Definition.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnees

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Un vecteur quelconque $\vec{u}$ de coordonnees (a, b, c) s'ecrit

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Propriete. Norme d'un vecteur

Dans un repere orthonorme, si $\vec{u}(a, b, c)$, alors la **norme** de $\vec{u}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pour deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, la distance AB vaut

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple.

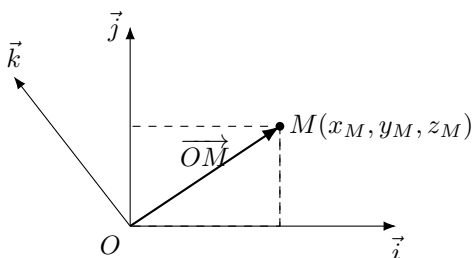
Dans le repere usuel, soit $A(1, 2, 0)$ et $B(3, -1, 4)$. Alors

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, -1 - 2, 4 - 0) = (2, -3, 4)$$

et

$$AB = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}.$$

Figure 1 : repere de l'espace et vecteur



2 Vecteurs, translation et familles de vecteurs

2.1 Operations et colinearite

Propriete.

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Somme : $\vec{u} + \vec{v} = (a + a', b + b', c + c')$.
- Oppose : $-\vec{u} = (-a, -b, -c)$.

— Produit par un réel : $\lambda \vec{u} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$.

Definition. Colinearite

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ sont **colineaires** s'il existe un réel λ tel que

$$(a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c).$$

Exemple.

Les vecteurs $\vec{u}(2, -4, 6)$ et $\vec{v}(-1, 2, -3)$ sont colineaires car $\vec{u} = -2 \vec{v}$.

2.2 Vecteur comme translation

Definition. Translation

La translation qui envoie A sur B est le déplacement qui transforme tout point M en M' tel que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}.$$

Le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{AB}$. Deux vecteurs sont égaux s'ils représentent la même translation (même direction, même sens, même longueur).

Exemple.

Si la translation de vecteur $\vec{u}(1, -2, 3)$ envoie $A(0, 1, 2)$ sur $B(1, -1, 5)$, alors tout point $M(x, y, z)$ est envoyé sur

$$M'(x + 1, y - 2, z + 3).$$

2.3 Vecteurs coplanaires

Definition. Coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un même plan, c'est-à-dire si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

Dans $\mathbb{R}^3$, par exemple, si

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v},$$

alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

Exemple.

Les vecteurs

$$\vec{u}(1, 0, 1), \quad \vec{v}(0, 1, 1), \quad \vec{w}(1, 1, 2)$$

sont coplanaires car $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

2.4 Vecteurs linéairement indépendants et base

Definition. Dependance linéaire

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des réels α, β, γ , non tous nuls, tels que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}.$$

Ils sont **linéairement indépendants** si

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Definition. Base de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ linéairement indépendants est une **base de l'espace**. Tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exemple.

Les vecteurs

$$\vec{i}(1, 0, 0), \quad \vec{j}(0, 1, 0), \quad \vec{k}(0, 0, 1)$$

sont linéairement indépendants. Tout vecteur $\vec{u}(a, b, c)$ se décompose comme

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

3 Droites de l'espace

3.1 Représentation paramétrique

Definition.

Une droite d est définie par

- un point $A(x_A, y_A, z_A)$,
- un vecteur directeur non nul $\vec{u}(a, b, c)$.

On a alors

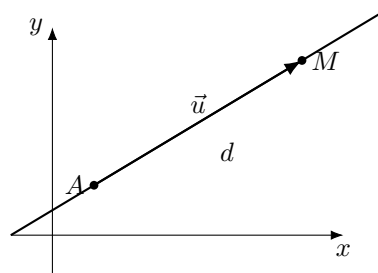
$$d : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Exemple.

La droite passant par $A(1, 0, 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(3, -1, 4)$:

$$d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Figure 2 : droite passant par un point



3.2 Positions relatives de deux droites

Propriété.

Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 peuvent être :

- **secantes** : un point commun.
- **parallèles** : vecteurs directeurs colinéaires, aucun point commun (ou confondues si tous les points sont communs).
- **gauches** (non coplanaires) : ni secantes ni parallèles.

4 Plans de l'espace

4.1 Plan par un point et deux vecteurs

Definition.

Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par :

- un point $A(x_A, y_A, z_A)$,
- deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$.

Tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{P}$ vérifie

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

4.2 Vecteur normal et équation cartésienne

Definition.

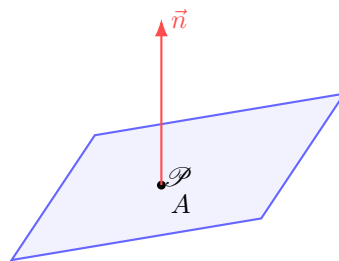
Un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur du plan. On peut alors écrire une équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Exemple.

Le plan d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2, -1, 3)$.

Figure 3 : plan et vecteur normal



5 Positions relatives : droite/plan, plan/plan

Propriété. Droite et plan

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$, alors d est parallèle (ou contenue) au plan $\mathcal{P}$.
- Sinon, d est sécante au plan $\mathcal{P}$.

Propriété. Deux plans

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont :

- parallèles ou confondus si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires ;
- sécants (intersection : une droite) sinon.

Figure 4 : deux plans sécants

