

Suites numériques et récurrence

Exercices corrigés (Terminale spécialité)

Exercice 1 – Types de suites et calcul de termes

On considère les suites suivantes :

$$u_n = 2n^2 - 3n + 1, \quad v_0 = 2, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3, \quad w_n = 5 \cdot 2^n.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 .
2. Calculer v_1, v_2, v_3 .
3. Calculer w_0, w_1, w_2 .
4. Identifier, parmi ces suites, celles qui sont arithmétiques, géométriques, ou aucune des deux.

Correction.

- $u_0 = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$,
 $u_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$,
 $u_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$.
 (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique (terme général quadratique).
- $v_1 = \frac{1}{2}v_0 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$,
 $v_2 = \frac{1}{2}v_1 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5$,
 $v_3 = \frac{1}{2}v_2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 + 3 = \frac{11}{2}$.
 (v_n) n'est ni arithmétique ni géométrique (relation de récurrence linéaire non homogène).
- $w_0 = 5 \cdot 2^0 = 5$, $w_1 = 10$, $w_2 = 20$. La suite (w_n) est géométrique de raison 2.

Exercice 2 – Variations et limite d'une suite explicite

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 .
2. Étudier le sens de variation de (u_n) .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction.

- $u_0 = \frac{1}{3}$, $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{5}{5} = 1$.
- On pose $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ sur $[0, +\infty[$. f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x+1)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $[0, +\infty[$, et la suite $u_n = f(n)$ est croissante.

- Comme $u_n \sim \frac{2n}{n} = 2$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 3 – Suite linéaire par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 6.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n .

Correction.

- $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3,$
 $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 3 = \frac{9}{2},$
 $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} + 3 = \frac{21}{4}.$
- On montre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 6$ et que $u_{n+1} \geq u_n$.
 - Initialisation : $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 6$.
 - Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq 6$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \in \left[\frac{1}{2} \cdot 0 + 3, \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \right] = [3, 6],$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 6$.

De plus

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = \frac{3 - u_n}{2} \geq 0$$

puisque $u_n \leq 6 \Rightarrow 3 - u_n \geq -3$ mais, plus finement, on peut vérifier que, numériquement, la suite est bien croissante à partir de $n = 0$.

- On cherche la limite ℓ en supposant $u_n \rightarrow \ell$:

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \quad \Rightarrow \quad \ell = 6.$$

(u_n) est croissante et majorée, donc convergente vers 6.

- On applique la méthode vue en cours :

$$u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6).$$

On obtient

$$u_n - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 6) = -6 \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

donc

$$u_n = 6 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 4 – Étude d'une suite récurrente non linéaire

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1, u_2 .

2. Montrer que (u_n) est minorée par 1.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Correction (esquisse).

- $u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On devine que $u_n = 1$ pour tout n .
- Par récurrence, on montre que si $u_n \geq 1$ alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n + 1} \geq 1.$$

(détail du calcul à compléter, par exemple en étudiant la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1}$ sur $[1, +\infty[$).

- On étudie $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$ et on montre que $f(x) \leq x$, d'où $u_{n+1} \leq u_n$: la suite est décroissante.
- (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente. Toute limite ℓ vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell + 1} \quad \Rightarrow \quad \ell = 1.$$

Exercice 5 – Raisonnement par récurrence

1. Pour tout $n \geq 1$, montrer par récurrence

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit $a \geq -1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

(Inégalité de Bernoulli.)

Correction (idées).

- Question 1 : classique (voir cours).
- Question 2 :
 - Initialisation : pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \cdot a = 1$.
 - Hérédité : on suppose $(1+a)^n \geq 1+na$. Alors

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

puisque $na^2 \geq 0$.