Fiche de révision

Ch. 3 - Orthogonalité et distances dans l'espace

1. Produit scalaire dans l'espace

- Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2. Droites, plans et vecteur normal

- Droite d : point A et vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$.
- Plan P : équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
  $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à P.
- Deux plans : parallèles ou confondus si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, sinon ils sont sécants (intersection = une droite).
- Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et plan P de vecteur normal $\vec{n}$:
  - si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$, alors d est parallèle (ou incluse) à P ;
  - sinon, d est sécante à P.

3. Projection orthogonale

Vecteur sur un vecteur

- Projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u} \neq \vec{0}$:
$$\vec{p} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}.$$

Point sur une droite

- Projeté orthogonal du point M sur une droite d : point $H \in d$ tel que la droite MH soit orthogonale à d.

Point sur un plan

- Projeté orthogonal du point M sur un plan P : intersection de P avec la droite passant par M et dirigée par un vecteur normal à P.

4. Distances dans l'espace

Distance entre deux points

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Distance point–droite

- Distance de M à une droite d : longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Distance point–plan

- Plan P : $ax + by + cz + d = 0$ et point $M(x_0, y_0, z_0)$:
$$d(M,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

5. À retenir

- Produit scalaire nul $\iff$ vecteurs orthogonaux.
- Vecteur normal = direction perpendiculaire au plan.
- Les projections orthogonales permettent de définir des distances (point–droite, point–plan).