

Ch. 3 - Orthogonalité et distances dans l'espace

Exercices corrigés

Exercice 1 - Produit scalaire et angle

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(-1, 4, 1)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. En déduire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Calculer une valeur approchée de l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Correction.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -2 - 4 + 3 = -3.$$

Le produit scalaire est non nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

On a

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Donc

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{14} \sqrt{18}}.$$

On obtient $\theta \approx 103^\circ$ (angle obtus).

Exercice 2 - Droites orthogonales ?

On considère deux droites de l'espace :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad d_2 : \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = 1 + s \\ z = 2 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune des droites.
2. Les droites peuvent-elles être orthogonales ? Justifier.

Correction.

Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}(1, -1, 2)$. Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v}(3, 1, -1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 - 1 - 2 = 0.$$

Les vecteurs directeurs sont orthogonaux. Si les droites sont coplanaires, elles sont perpendiculaires. Ici, on admet qu'elles sont coplanaires.

Exercice 3 - Distance d'un point à un plan

On considère le plan

$$P : 2x - y + 2z - 3 = 0$$

et le point $M(1, 2, -1)$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P .
2. Calculer la distance $d(M, P)$.

Correction.

Un vecteur normal au plan est $\vec{n}(2, -1, 2)$.

On applique la formule

$$d(M, P) = \frac{|2x_M - y_M + 2z_M - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}.$$

On remplace $x_M = 1$, $y_M = 2$, $z_M = -1$:

$$2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 2 - 2 - 2 - 3 = -5.$$

Donc

$$d(M, P) = \frac{|-5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{5}{3}.$$

Exercice 4 - Projection orthogonale sur une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $M(2, 1, 3)$ et la droite

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d .
2. Écrire les coordonnées d'un point $H(t) \in d$.
3. Déterminer la valeur de t telle que $\overrightarrow{MH(t)}$ soit orthogonale à $\vec{u}$.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .

Correction.

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(2, 1, 1)$.

Un point de d s'écrit

$$H(t)(1 + 2t, -1 + t, 1 + t).$$

Alors

$$\overrightarrow{MH(t)} = (1 + 2t - 2, -1 + t - 1, 1 + t - 3) = (-1 + 2t, -2 + t, -2 + t).$$

On impose $\overrightarrow{MH(t)} \cdot \vec{u} = 0$:

$$(-1 + 2t) \cdot 2 + (-2 + t) \cdot 1 + (-2 + t) \cdot 1 = 0.$$

Soit

$$2(-1 + 2t) + (-2 + t) + (-2 + t) = -2 + 4t - 2 + t - 2 + t = 6t - 6.$$

On obtient $6t - 6 = 0 \iff t = 1$.

Donc le projeté orthogonal est

$$H(1) = (1 + 2, -1 + 1, 1 + 1) = (3, 0, 2).$$

Exercice 5 - Distance d'un point à une droite

On reprend le point $M(2, 1, 3)$ et la droite d de l'exercice précédent.

1. Rappeler les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .
2. Calculer la distance de M à la droite d .

Correction.

On a trouvé $H(3, 0, 2)$.

La distance de M à la droite d vaut

$$d(M, d) = MH = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$