Ch. 3 — Orthogonalité et distances dans l'espace

Spécialité mathématiques – Terminale

1 Produit scalaire dans l'espace

On travaille dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition. Produit scalaire

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace. On définit le **produit scalaire** par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

Si θ est la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Propriété. Orthogonalité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** (si et seulement si ils sont perpendiculaires) lorsque

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple.

On considère $\vec{u}(1, 2, -1)$ et $\vec{v}(2, -4, 2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = 2 - 8 - 2 = -8.$$

Le produit scalaire n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux. Par ailleurs, on remarque que $\vec{v} \neq \lambda \vec{u}$ pour tout λ, ils ne sont pas colinéaires.

2 Orthogonalité de droites et de plans

2.1 Droites

Une droite d de l'espace peut être définie par un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$.

Propriété. Droites orthogonales

Soient deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Si

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

et si les deux droites sont coplanaires, alors les droites sont **orthogonales** (perpendiculaires).

Exemple.

La droite d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1, -1, 2)$ et la droite d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2(3, 1, -1)$. Alors

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 - 1 - 2 = 0.$$

Les vecteurs directeurs sont orthogonaux ; si les droites sont coplanaires, on dit qu'elles sont perpendiculaires.

2.2 Plans et vecteur normal

Définition. Vecteur normal et équation cartésienne

Un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est **normal** à un plan P s'il est orthogonal à tout vecteur du plan. Dans un repère orthonormé, une équation cartésienne de P est

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est alors un vecteur normal au plan P.

Propriété. Plans parallèles ou sécants

Soient deux plans P et Q de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

— Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, alors les plans sont **parallèles ou confondus**.

— Sinon, les plans sont **sécants** et leur intersection est une droite.

2.3 Droite et plan

Propriété. Position d'une droite par rapport à un plan

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de vecteur normal $\vec{n}$.

— Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$, alors d est **parallèle** au plan P (ou entièrement contenue dans P).

— Si $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, alors d est **sécante** au plan P.

3 Projections orthogonales

3.1 Projection d'un vecteur sur un autre

Définition. Projection orthogonale d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un autre vecteur. La **projection orthogonale** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{p}$ colinéaire à $\vec{u}$ tel que $\vec{v} - \vec{p}$ soit orthogonal à $\vec{u}$. On a la formule :

$$\vec{p} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}.$$

Exemple.

On considère $\vec{u}(1, 2, 2)$ et $\vec{v}(2, 1, 3)$. Alors

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 6 = 10, \quad \|\vec{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

La projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est

$$\vec{p} = \frac{10}{9}\,\vec{u} = \frac{10}{9}(1, 2, 2).$$

3.2 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ contenant un point $A(x_A, y_A, z_A)$. Une représentation paramétrique de d est

$$d : \quad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Définition. Projeté orthogonal sur une droite

Soit M un point de l'espace. Le **projeté orthogonal** de M sur la droite d est le point $H \in d$ tel que la droite MH soit orthogonale à d.

En pratique :

1. on écrit les coordonnées d'un point $H(t)$ de la droite ;
2. on impose $\overrightarrow{MH(t)} \cdot \vec{u} = 0$ pour trouver t ;
3. on en déduit les coordonnées de H.

3.3 Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition. Projeté orthogonal sur un plan

Soit un plan P et un point M n'appartenant pas à P. Le **projeté orthogonal** de M sur P est le point H tel que $H \in P$ et que la droite MH soit orthogonale à P.

En pratique :

— on considère la droite passant par M et dirigée par un vecteur normal au plan P ;

— le projeté orthogonal H est l'unique point d'intersection de cette droite avec le plan P.

4 Distances dans l'espace

4.1 Distance entre deux points

Propriété.

La distance entre deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

4.2 Distance d'un point à une droite

Définition.

La distance d'un point M à une droite d est la longueur du segment $[MH]$, où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Pour la calculer :

1. déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d ;
2. calculer MH avec la formule de la distance entre deux points.

4.3 Distance d'un point à un plan

Propriété. Formule de la distance point–plan

Soit un plan

$$P : ax + by + cz + d = 0$$

et un point $M(x_0, y_0, z_0)$. La distance de M au plan P est

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque.

Cette formule se déduit de la projection orthogonale sur la direction du vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ au plan.

À retenir : le produit scalaire est l'outil central pour l'orthogonalité, les projections et les distances dans l'espace.