

Terminale Spécialité - Vecteurs, droites et plans de l'espace

Consigne : rédiger les quatre questions de chaque exercice, justifier les calculs vectoriels et conclure géométriquement.

Exercice 1 - Vecteurs, produit scalaire et normes

Facile

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.
4. Calculer les distances AB et AC .

Exercice 2 - Droite paramétrique et appartenance

Facile

On considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer un vecteur directeur de la droite (AB) .
2. Donner une représentation paramétrique de (AB) .
3. Déterminer si $M \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ appartient à (AB) .
4. Déterminer le point P de (AB) dont l'abscisse vaut 9.

Exercice 3 - Alignement avec paramètre

Facile

On considère $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C_m \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ m \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC_m}$.
2. Déterminer m pour que A , B et C_m soient alignés.
3. Pour cette valeur de m , donner une représentation paramétrique de (AB) .
4. Déterminer le point P de (AB) dont la cote vaut 9.

Exercice 4 - Plan défini par un point et une normale

Facile

Le plan $\mathcal{P}$ passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

1. Écrire la condition vectorielle caractérisant les points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
3. Tester l'appartenance de $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ puis de $C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}$.
4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des cotes.

Exercice 5 - Plan passant par trois points

Facile

On considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis justifier que les trois points ne sont pas alignés.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) sans utiliser de produit vectoriel.
3. En déduire une équation cartésienne de (ABC) , puis tester $D \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer le point d'intersection du plan (ABC) avec l'axe des abscisses.

Exercice 6 - Intersection droite-plan

Moyen

On considère la droite (d) donnée par $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 8 = 0$.

1. Donner un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le point d'intersection de (d) et $\mathcal{P}$.
3. La droite (d) est-elle parallèle à $\mathcal{P}$?
4. La droite (d) est-elle perpendiculaire à $\mathcal{P}$?

Exercice 7 - Droite incluse dans un plan

Moyen

On considère $(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{P} : x + y + z - 4 = 0$.

1. Vérifier que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, point de (d) , appartient à $\mathcal{P}$.
2. Montrer que le vecteur directeur de (d) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
3. En déduire la position relative de (d) et $\mathcal{P}$.
4. Déterminer le point de (d) dont l'abscisse vaut 4.

Exercice 8 - Deux droites parallèles et plan commun

Moyen

On considère (d_1) passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et (d_2) passant par $B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Comparer $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Vérifier que $B \notin (d_1)$.
3. En déduire la position relative de (d_1) et (d_2) .
4. Déterminer une équation du plan contenant les deux droites.

Exercice 9 - Deux droites sécantes et angle

Moyen

On considère (d_1) passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et (d_2) passant par $B \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Résoudre l'égalité $A + t\vec{u} = B + s\vec{v}$.

3. En déduire la position relative des deux droites et leur point commun.
4. Calculer le cosinus de l'angle aigu formé par les deux droites.

Exercice 10 - Projeté orthogonal sur un plan

Moyen

On considère le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 6 = 0$ et le point $M \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le paramètre du point d'intersection H de cette droite avec $\mathcal{P}$.
3. Donner les coordonnées de H .
4. Calculer la distance de M au plan $\mathcal{P}$ et justifier pourquoi elle vaut MH .

Exercice 11 - Base de l'espace et décomposition

Difficile

On considère $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Décomposer $\vec{p} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Décomposer $\vec{q} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.
4. Déterminer une équation du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 12 - Coplanarité avec paramètre

Difficile

On considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_m \begin{pmatrix} 3 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD_m}$, puis vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer m pour que les quatre points soient coplanaires.
3. Pour cette valeur, exprimer $\overrightarrow{AD_m}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer une équation du plan (ABC) et vérifier directement que D_m y appartient pour la valeur trouvée.

Exercice 13 - Angle entre deux directions de l'espace

Difficile

On considère $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. En déduire le cosinus de l'angle $\theta \in [0; \pi]$ entre les deux vecteurs.
4. Comparer θ à 60° sans utiliser de calculatrice.

Exercice 14 - Plan médiateur de deux points

Difficile

On considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $MA = MB$.

1. Écrire l'égalité $MA^2 = MB^2$.
2. Développer et simplifier cette égalité pour obtenir une équation cartésienne.
3. Montrer que le milieu I de $[AB]$ appartient au plan obtenu.
4. Montrer que ce plan est perpendiculaire à (AB) et conclure sur sa nature géométrique.

Exercice 15 - Plan défini par un point et deux directions

Difficile

Le plan $\mathcal{P}$ passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et a pour directions $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ sans produit vectoriel.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
4. Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite Δ passant par l'origine et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 - Droite et plan dépendant d'un paramètre

Difficile

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $(d_m) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + mt \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{P} : 2x - y + z - 1 = 0$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_m$ de (d_m) et une normale $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$, puis calculer $\vec{u}_m \cdot \vec{n}$.
2. Déterminer la valeur de m pour laquelle (d_m) est parallèle au plan.
3. Pour cette valeur, montrer que la droite est strictement parallèle au plan et non incluse.
4. Pour $m = 2$, déterminer le point d'intersection de (d_m) avec $\mathcal{P}$.

Exercice 17 - Deux plans parallèles et distance

Difficile

On considère $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$ et $\mathcal{Q} : 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.

1. Comparer des vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
2. Montrer que les deux plans sont parallèles et distincts.
3. Choisir un point A simple de $\mathcal{P}$ et écrire la droite passant par A perpendiculairement aux deux plans.
4. Déterminer son intersection H avec $\mathcal{Q}$, puis calculer la distance entre les deux plans.

Exercice 18 - Tétraèdre : aire, hauteur et volume

Difficile

Dans un repère orthonormé, on considère $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.
2. Déterminer le projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) .
3. Calculer la distance de D au plan (ABC) .
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 19 - Cube, plan diagonal et projection

Difficile

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, on travaille dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de C , G et du vecteur $\overrightarrow{AG}$.
2. Déterminer une équation du plan (BDH) .
3. Déterminer le point d'intersection de la diagonale (AG) avec le plan (BDH) .
4. Déterminer le projeté orthogonal K de A sur (BDH) , puis calculer AK .

Exercice 20 - Distance d'un point à une droite par projection

Difficile

La droite (d) passe par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère $M \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Paramétrer un point H de (d) .
2. Traduire la condition « H est le projeté orthogonal de M sur (d) » par une équation en t .
3. Déterminer les coordonnées de H .
4. Calculer la distance de M à (d) .

Exercice 21 - Projeté sur un plan et propriété de distance minimale

Très difficile / Bac

On considère $M \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 7 = 0$.

1. Écrire la droite Δ passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le point $H = \Delta \cap \mathcal{P}$.
3. Calculer MH et en déduire la distance de M à $\mathcal{P}$.
4. Pour un point quelconque $N \in \mathcal{P}$, justifier géométriquement que $MN \geq MH$.

Exercice 22 - Famille de plans et droite paramétrique

Très difficile / Bac

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $\mathcal{P}_m : x + my + z - 2 = 0$ et la droite $(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. Donner un vecteur directeur de (d) , une normale à $\mathcal{P}_m$, puis calculer leur produit scalaire.
2. Déterminer m pour que (d) soit parallèle à $\mathcal{P}_m$, puis préciser s'il y a inclusion.
3. Pour $m \neq 2$, déterminer le paramètre du point d'intersection de (d) avec $\mathcal{P}_m$.
4. Pour $m = 0$, donner exactement le point d'intersection.

Exercice 23 - Synthèse droite-plan et projection d'un point

Très difficile / Bac

On considère $\mathcal{P} : x - 2y + 2z + 1 = 0$, la droite (d) passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, et le point $M = A$.

1. Déterminer l'intersection de (d) avec $\mathcal{P}$.
2. Montrer que (d) n'est ni parallèle ni perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.
4. Calculer $d(A, \mathcal{P})$ et comparer cette distance à AI , où $I = (d) \cap \mathcal{P}$.

Exercice 24 - Base adaptée et distance à un plan

Très difficile / Bac

On considère $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{p} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Décomposer $\vec{p}$ dans cette base.
3. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine et engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de $P \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{P}$ et la distance de P à $\mathcal{P}$.

Exercice 25 - Triangle spatial et centre par projection

Très difficile / Bac

On considère $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'origine $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation du plan (ABC) .
2. Déterminer le projeté orthogonal H de O sur (ABC) .
3. Calculer la distance de O au plan (ABC) .
4. Montrer que H est équidistant de A , B et C , puis calculer cette distance commune.

Exercice 26 - Deux droites non coplanaires

Très difficile / Bac

On considère $(d_1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(d_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $t, s \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que les deux droites ne sont pas sécantes.
3. En déduire leur position relative dans l'espace.
4. Déterminer un plan $\mathcal{P}$ contenant (d_1) et parallèle à (d_2) , puis calculer la distance de (d_2) à $\mathcal{P}$.

Exercice 27 - Point mobile sur une droite et distance minimale

Très difficile / Bac

La droite (d) est paramétrée par $H(t) \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. On considère $M \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $MH(t)^2$ en fonction de t .
2. Déterminer la valeur de t qui minimise cette expression.
3. En déduire le point H_0 de (d) le plus proche de M et la distance MH_0 .
4. Vérifier par un produit scalaire que H_0 est bien le projeté orthogonal de M sur (d) .

Exercice 28 - Coplanarité paramétrique par équation de plan

Très difficile / Bac

On considère $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_m \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A , B et C définissent un plan.
2. Déterminer une équation cartésienne de (ABC) .
3. Déterminer m pour que $D_m \in (ABC)$.
4. Pour cette valeur, exprimer $\overrightarrow{AD_m}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 29 - Plan contenant une droite et un point extérieur**Très difficile / Bac**

La droite (d) passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On considère $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'origine $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $B \notin (d)$.
2. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ contenant (d) et B .
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et vérifier qu'elle contient toute la droite (d) .
4. Déterminer le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$ et calculer la distance de O à $\mathcal{P}$.

Exercice 30 - Synthèse Bac — intersection, projeté et comparaison de distances**Très difficile / Bac**

On considère le plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z - 3 = 0$, la droite $(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et le point $M \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le point $I = (d) \cap \mathcal{P}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$.
3. Calculer exactement $d(M, \mathcal{P})$.
4. Calculer MI , comparer MI et MH , puis expliquer géométriquement l'inégalité obtenue.