Suites numériques et récurrence

Terminale Spécialité

Exercice 1 – Récurrence affine – point fixe et vitesse **

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 8, \qquad u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}2.$$

1. Déterminer le point fixe de la relation.
2. Poser $v_n = u_n - L$ et montrer que (v_n) est géométrique.
3. Déterminer une expression explicite de u_n, la démontrer par récurrence, puis calculer sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - L| < 10^{-2}$.

Exercice 2 – Terme général démontré par récurrence *

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 7, \qquad u_{n+1} = 3u_n - 4.$$

1. Calculer u_1 et u_2, puis conjecturer une expression de u_n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 + 5 \times 3^n.$$

3. En déduire le sens de variation de (u_n) et sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$.

Exercice 3 – Intervalle stable puis convergence *

Soit (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer une expression explicite de u_n, puis démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 4 – Racine carrée – récurrence et point fixe **

On définit

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout n,

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\,(2 - u_n),$$

puis en déduire une majoration géométrique de $2 - u_n$.

Exercice 5 – Suite auxiliaire $v_n = 1/u_n$ *

Soit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

1. Montrer que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. Poser $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Déterminer v_n, puis une expression explicite de u_n, et la démontrer par récurrence.
4. Donner la limite de (u_n).

Exercice 6 – Télescopage avancé **

On définit $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

1. Décomposer $\dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+3}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer la formule obtenue par récurrence.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 7 – Rationalisation et contrôle de l'erreur ***

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

1. Montrer que
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}.$$
2. En déduire que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ et calculer $\lim u_n$.
3. Montrer que
$$0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{8n}.$$
4. Donner un rang N à partir duquel $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| < 10^{-3}$.

Exercice 8 – Paramètre – étude complète selon a ***

On définit, pour un réel a,

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = a u_n + (1-a).$$

1. Poser $v_n = u_n - 1$, montrer que (v_n) est géométrique, trouver l'expression explicite de u_n, puis la démontrer par récurrence.
2. Étudier la convergence lorsque $|a| < 1$, puis lorsque $a = 1$.
3. Étudier les cas $a = -1$ et $a < -1$.
4. Étudier le cas $a > 1$ et dresser un bilan complet selon a.

Exercice 9 – Suite logistique – erreur quadratique **

On définit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

1. Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Poser $e_n = 1 - u_n$. Montrer que $e_{n+1} = e_n^2$.
4. En déduire une expression exacte de u_n, puis la démontrer par récurrence.
   Puis : Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| < 10^{-6}$.

Exercice 10 – Newton pour $\sqrt{2}$ ***

On définit

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire sa limite.
4. Montrer que l'erreur vérifie

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

Exercice 11 – Suite auxiliaire homographique – correction du piège de signe ****

On définit

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n + 1}.$$

On pose

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n. En déduire que v_n est bien définie, puis montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$.
2. Déterminer v_0, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis obtenir une expression explicite de u_n.
4. Déterminer la limite de (u_n) et expliquer l'alternance des termes autour de cette limite.

Exercice 12 – Récurrence chaînée – variante type Bac ***

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}.$$

On pose $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x + 2}$ sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Poser $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n$, en déduire une expression explicite de u_n, la démontrer par récurrence, puis retrouver la limite.

Exercice 13 – Suites adjacentes – encadrement d'une limite ***

On considère deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que $a_n \leq b_n$ pour tout n.
2. Étudier les variations de (a_n) et (b_n).
3. Montrer que $b_n - a_n \to 0$.
4. En déduire que les deux suites convergent vers la même limite, la déterminer, puis trouver des expressions explicites de a_n et b_n et les démontrer par récurrence.

Exercice 14 – Seuil algorithmique – modèle arithmético-géométrique ***

On modélise une grandeur par

$$u_0 = 10, \qquad u_{n+1} = 0{,}82u_n + 9.$$

1. Déterminer le point fixe L.
2. Poser $v_n = u_n - L$, donner une expression explicite de u_n, puis la démontrer par récurrence.
3. Justifier la convergence de (u_n).
4. Écrire un algorithme Python qui renvoie le premier entier n tel que $|u_n - L| < 0{,}1$.
   Puis : Déterminer exactement ce premier rang.

Exercice 15 – Monotonie par factorisation – point fixe et erreur ***

On considère

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4}.$$

1. Montrer par récurrence que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout n.
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie.
3. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
4. Poser $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$, puis en déduire une expression de v_n.

Exercice 16 – Inégalité de Bernoulli – démonstration officielle ***

Soit $x > -1$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2. Soit $q \in]0; 1[$. Appliquer le résultat précédent à $x = \frac{1}{q} - 1$.
3. En déduire, à partir de cet encadrement, que

$$\boxed{q^n \to 0}.$$

4. Pour $q = \frac{4}{5}$, donner à l'aide de cette démonstration un rang N garantissant $q^n < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 17 – Récurrence double – identité de Cassini généralisée ***

On définit

$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$D_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2.$$

1. Calculer D_0.
2. Montrer que $D_{n+1} = -D_n$.
3. En déduire par récurrence que
$$\boxed{D_n = 5(-1)^n}.$$
4. Déterminer sans calculer les termes de la suite la valeur de D_{2026}.

Exercice 18 – Suite implicite par encadrement *

On suppose que (u_n) vérifie, pour tout $n \geq 1$,

$$2 - \frac{3}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que les deux suites bornes $2 - \dfrac{3}{n}$ et $2 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}$ convergent vers la même limite.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. À partir de quel rang est-on sûr que $|u_n - 2| \leq 0{,}01$?
4. Pour un réel $\varepsilon > 0$, donner un rang explicite $N(\varepsilon)$ garantissant $|u_n - 2| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N(\varepsilon)$.

Exercice 19 – Produit télescopique – limite non triviale **

Pour $n \geq 1$, on définit

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

1. Factoriser chaque terme sous la forme d'un produit de deux fractions.
2. Simplifier le produit, obtenir
$$\boxed{u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}},$$
puis démontrer cette formule par récurrence.
3. En déduire la limite de (u_n).
4. Réécrire u_n sous la forme $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(n+1)}$ et en déduire le sens de variation.

Exercice 20 – Récurrence avec valeur absolue – stabilité *

Soit

$$u_0 \in [-1; 1], \qquad u_{n+1} = \frac{|u_n| + u_n^2}{3}.$$

1. Montrer que $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3} u_n$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire la limite.
4. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$0 \leq u_n \leq u_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$
et expliquer pourquoi cette majoration renforce la conclusion précédente.

Exercice 21 – Point fixe irrationnel – étude sans théorème de contraction ****

Soit $u_0 \in [0;2]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 3}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{2}{3} \leq u_n \leq \frac{4}{5}.$$
2. Déterminer l'unique point fixe α de la relation dans cet intervalle.
3. Montrer que si $u_1 \leq \alpha$, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par α.
4. Montrer que si $u_1 \geq \alpha$, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par α.
   Puis : En déduire la convergence et la limite dans tous les cas.

Exercice 22 – Récurrence linéaire d'ordre 2 – deux méthodes ****

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et conjecturer une expression de u_n.
2. Démontrer par récurrence à deux rangs que
$$\boxed{u_n = 2^n - 1}.$$
3. Poser $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et retrouver la formule précédente.
4. Donner la limite de (u_n).

Exercice 23 – Divergence non linéaire – minoration par récurrence ***

On définit

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que tous les termes sont strictement positifs et que (u_n) est croissante.
2. Montrer que
$$u_{n+1}^2 \geq u_n^2 + 2.$$
3. Démontrer par récurrence que
$$\boxed{u_n^2 \geq 2n + 1}.$$
4. En déduire la divergence de (u_n) vers $+\infty$.

Exercice 24 – Homographique – linéarisation autour de deux points fixes ****

On définit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Déterminer les deux points fixes de la transformation.
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n. Poser ensuite
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$
   Justifier que v_n est bien définie et montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$.
3. Déterminer v_n, puis trouver une expression explicite de u_n en fonction de n et la démontrer par récurrence.
4. Déterminer la limite de (u_n).
   Puis : Donner un rang à partir duquel $|u_n - 1| < 10^{-4}$.

Exercice 25 – Point fixe irrationnel – convergence oscillante ****

On définit

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que tous les termes sont strictement positifs.
2. Déterminer les deux points fixes de la transformation.
3. Poser
$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}.$$
Montrer que
$$v_{n+1} = q v_n \quad \text{avec} \quad q = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$
4. En déduire la limite de (u_n).
Puis : Expliquer pourquoi les termes se situent alternativement de part et d'autre de la limite.

Exercice 26 – Suites adjacentes – moyennes harmonique et arithmétique ****

On définit

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 4,$$

et, pour tout n,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer par récurrence que $0 < a_n \leq b_n$.
2. Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
3. Montrer que
$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$
4. En déduire que les suites sont adjacentes.
Puis : Montrer que $a_n b_n = 4$ pour tout n, puis déterminer leur limite commune.

Exercice 27 – Conjecture puis récurrence – forme en $1/\sqrt{n}$ ****

On définit, pour $n \geq 1$,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3, puis conjecturer une expression de u_n.
2. Démontrer cette expression par récurrence.
3. En déduire la limite de (u_n).
4. Retrouver le résultat en posant $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

Exercice 28 – Racine récurrente – majoration géométrique de l'erreur ****

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que
$$0 \leq 3 - u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6 + u_n}} \leq q(3 - u_n),$$
où $q = \dfrac{1}{3 + \sqrt{6}}$.

4. En déduire une majoration de $3 - u_n$.

   Puis : Donner un rang à partir duquel $|u_n - 3| < 10^{-6}$.

Exercice 29 – Comparaison par récurrence – convergence non géométrique ****

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}.$$

4. En déduire la limite de (u_n).

   Puis : Expliquer pourquoi cet exercice illustre une convergence qui ne se traite pas directement par une simple translation vers un point fixe constant.

Exercice 30 – Synthèse type Bac – stabilité, point fixe, erreur et algorithme ****

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{5 + u_n}.$$

On pose $f(x) = \dfrac{2 + 3x}{5 + x}$.

1. Montrer que $[0; 1]$ est stable par f.
2. Déterminer l'unique point fixe $\alpha \in [0; 1]$.
3. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par α.
4. En déduire la convergence de (u_n).

   Puis : Montrer l'identité

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{4 - \sqrt{3}}{u_n + 5}(u_n - \alpha).$$

   Puis : En déduire une majoration géométrique de $|u_n - \alpha|$.

   Puis : Écrire un algorithme qui renvoie le premier rang n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-6}$.