

Exercices - Suites numériques et récurrence

Exercice 1 - Récurrence affine — point fixe et vitesse

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 8, \quad u_{n+1} = 0,7u_n + 1,2.$$

1. Déterminer le point fixe de la relation.
2. Poser $v_n = u_n - L$ et montrer que (v_n) est géométrique.
3. Donner l'expression de u_n , puis calculer sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - L| < 10^{-2}$.

Exercice 2 - Terme général démontré par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 7, \quad u_{n+1} = 3u_n - 4.$$

1. Calculer u_1 et u_2 , puis conjecturer une expression de u_n .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 + 5 \cdot 3^n.$$

3. En déduire le sens de variation de (u_n) et sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$.

Exercice 3 - Intervalle stable puis convergence

Soit (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Calculer u_1, u_2, u_3 et donner une valeur approchée de u_3 à 10^{-3} près.

Exercice 4 - Racine carrée — récurrence et point fixe

On définit

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout n ,

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}} (2 - u_n),$$

puis en déduire une majoration géométrique de $2 - u_n$.

Exercice 5 - Suite auxiliaire $v_n = 1/u_n$

Soit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Montrer que $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer v_n , puis u_n .
4. Donner la limite de (u_n) .

Exercice 6 - Télescopage avancé

On définit $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

1. Décomposer $\frac{2}{(n+1)(n+3)}$ sous la forme $\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 7 - Rationalisation et contrôle de l'erreur

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

1. Montrer que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

2. En déduire que $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ et calculer $\lim u_n$.
3. Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{8n}.$$

4. Donner un rang N à partir duquel $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < 10^{-3}$.

Exercice 8 - Paramètre — étude complète selon a

On définit, pour un réel a ,

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = au_n + (1 - a).$$

1. Poser $v_n = u_n - 1$, montrer que (v_n) est géométrique et exprimer u_n .
2. Étudier la convergence lorsque $|a| < 1$, puis lorsque $a = 1$.
3. Étudier les cas $a = -1$ et $a < -1$.
4. Étudier le cas $a > 1$ et dresser un bilan complet selon a .

Exercice 9 - Suite logistique — erreur quadratique

On définit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

1. Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Poser $e_n = 1 - u_n$. Montrer que $e_{n+1} = e_n^2$.
4. En déduire une expression exacte de u_n . Puis : Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| < 10^{-6}$.

Exercice 10 - Newton pour $\sqrt{2}$

On définit

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire sa limite.
4. Montrer que l'erreur vérifie

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

Exercice 11 - Suite auxiliaire homographique — correction du piège de signe

On définit

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n + 1}.$$

On pose

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$.
2. Déterminer v_0 , puis exprimer v_n en fonction de n .
3. Exprimer u_n en fonction de v_n , puis obtenir une expression explicite de u_n .
4. Déterminer la limite de (u_n) et expliquer l'alternance des termes autour de cette limite.

Exercice 12 - Récurrence chaînée — variante type Bac

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}.$$

On pose $f(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$ sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Poser $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$, puis retrouver la limite.

Exercice 13 - Suites adjacentes — encadrement d'une limite

On considère deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que $a_n \leq b_n$ pour tout n .
2. Étudier les variations de (a_n) et (b_n) .
3. Montrer que $b_n - a_n \rightarrow 0$.
4. En déduire que les deux suites convergent vers la même limite, puis la déterminer.

Exercice 14 - Seuil algorithmique — modèle arithmético-géométrique

On modélise une grandeur par

$$u_0 = 10, \quad u_{n+1} = 0,82u_n + 9.$$

1. Déterminer le point fixe L .
2. Poser $v_n = u_n - L$, puis donner une expression explicite de u_n .
3. Justifier la convergence de (u_n) .
4. Écrire un algorithme Python qui renvoie le premier entier n tel que $|u_n - L| < 0,1$. Puis : Déterminer exactement ce premier rang.

Exercice 15 - Monotonie par factorisation — point fixe et erreur

On considère

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4}.$$

1. Montrer par récurrence que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie.

- Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
- Poser $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$, puis en déduire une expression de v_n .

Exercice 16 - Inégalité de Bernoulli — démonstration officielle

Soit $x > -1$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- Soit $q \in]0; 1[$. Appliquer le résultat précédent à $x = \frac{1}{q} - 1$.

- En déduire, à partir de cet encadrement, que

$$\boxed{q^n \rightarrow 0}.$$

- Pour $q = \frac{4}{5}$, donner à l'aide de cette démonstration un rang N garantissant $q^n < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 17 - Récurrence double — identité de Cassini généralisée

On définit

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$D_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2.$$

- Calculer D_0 .
- Montrer que $D_{n+1} = -D_n$.
- En déduire par récurrence que

$$\boxed{D_n = 5(-1)^n}.$$

- Déterminer sans calculer les termes de la suite la valeur de D_{2026} .

Exercice 18 - Suite implicite par encadrement

On suppose que (u_n) vérifie, pour tout $n \geq 1$,

$$2 - \frac{3}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

- Montrer que (u_n) converge.
- Donner sa limite.
- À partir de quel rang est-on sûr que $|u_n - 2| \leq 0,01$?
- Pour un réel $\varepsilon > 0$, donner un rang explicite $N(\varepsilon)$ garantissant $|u_n - 2| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N(\varepsilon)$.

Exercice 19 - Produit télescopique — limite non triviale

Pour $n \geq 1$, on définit

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

- Factoriser chaque terme sous la forme d'un produit de deux fractions.
- Simplifier le produit et montrer que

$$\boxed{u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}}.$$

- En déduire la limite de (u_n) .
- Réécrire u_n sous la forme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}$ et en déduire le sens de variation.

Exercice 20 - Récurrence avec valeur absolue — stabilité

Soit

$$u_0 \in [-1; 1], \quad u_{n+1} = \frac{|u_n| + u_n^2}{3}.$$

1. Montrer que $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire la limite.
4. Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq u_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

et expliquer pourquoi cette majoration renforce la conclusion précédente.

Exercice 21 - Point fixe irrationnel — étude sans théorème de contraction

Soit $u_0 \in [0; 2]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 3}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{2}{3} \leq u_n \leq \frac{4}{5}.$$

2. Déterminer l'unique point fixe α de la relation dans cet intervalle.
3. Montrer que si $u_1 \leq \alpha$, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par α .
4. Montrer que si $u_1 \geq \alpha$, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par α . Puis : En déduire la convergence et la limite dans tous les cas.

Exercice 22 - Récurrence linéaire d'ordre 2 — deux méthodes

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et conjecturer une expression de u_n .
2. Démontrer par récurrence à deux rangs que

$$u_n = 2^n - 1.$$

3. Poser $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et retrouver la formule précédente.
4. Donner la limite de (u_n) .

Exercice 23 - Divergence non linéaire — minoration par récurrence

On définit

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que tous les termes sont strictement positifs et que (u_n) est croissante.
2. Montrer que

$$u_{n+1}^2 \geq u_n^2 + 2.$$

3. Démontrer par récurrence que

$$u_n^2 \geq 2n + 1.$$

4. En déduire la divergence de (u_n) vers $+\infty$.

Exercice 24 - Homographique — linéarisation autour de deux points fixes

On définit

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Déterminer les deux points fixes de la transformation.
2. Poser

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$.

3. Déterminer v_n , puis exprimer u_n en fonction de v_n .
4. Déterminer la limite de (u_n) . Puis : Donner un rang à partir duquel $|u_n - 1| < 10^{-4}$.

Exercice 25 - Point fixe irrationnel — convergence oscillante

On définit

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que tous les termes sont strictement positifs.
2. Déterminer les deux points fixes de la transformation.
3. Poser

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}.$$

Montrer que

$$v_{n+1} = qv_n \quad \text{avec} \quad q = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

4. En déduire la limite de (u_n) . Puis : Expliquer pourquoi les termes se situent alternativement de part et d'autre de la limite.

Exercice 26 - Suites adjacentes — moyennes harmonique et arithmétique

On définit

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4,$$

et, pour tout n ,

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer par récurrence que $0 < a_n \leq b_n$.
2. Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
3. Montrer que

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

4. En déduire que les suites sont adjacentes. Puis : Montrer que $a_nb_n = 4$ pour tout n , puis déterminer leur limite commune.

Exercice 27 - Conjecture puis récurrence — forme en $1/\sqrt{n}$

On définit, pour $n \geq 1$,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3 , puis conjecturer une expression de u_n .
2. Démontrer cette expression par récurrence.
3. En déduire la limite de (u_n) .
4. Retrouver le résultat en posant $v_n = \frac{1}{u_n^2}$.

Exercice 28 - Racine récurrente — majoration géométrique de l'erreur

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que

$$0 \leq 3 - u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6 + u_n}} \leq q(3 - u_n),$$

$$\text{où } q = \frac{1}{3 + \sqrt{6}}.$$

4. En déduire une majoration de $3 - u_n$. Puis : Donner un rang à partir duquel $|u_n - 3| < 10^{-6}$.

Exercice 29 - Comparaison par récurrence — décroissance non géométrique

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n .
2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}.$$

4. En déduire la limite de (u_n) . Puis : Expliquer pourquoi cet exercice illustre une convergence qui ne se traite pas directement par une simple translation vers un point fixe constant.

Exercice 30 - Synthèse type Bac — stabilité, point fixe, erreur et algorithme

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{5 + u_n}.$$

$$\text{On pose } f(x) = \frac{2 + 3x}{5 + x}.$$

1. Montrer que $[0; 1]$ est stable par f .
2. Déterminer l'unique point fixe $\alpha \in [0; 1]$.
3. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par α .
4. En déduire la convergence de (u_n) . Puis : Montrer l'identité

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{4 - \sqrt{3}}{u_n + 5}(u_n - \alpha).$$

Puis : En déduire une majoration géométrique de $|u_n - \alpha|$. Puis : Écrire un algorithme qui renvoie le premier rang n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-6}$.