

Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Terminale Spécialité – 30 exercices type Bac – version impression noir et blanc

Exercice 1 – Dossiers de candidature – arbre pondéré, total et Bayes

Une plateforme de candidature classe 40 % des dossiers dans la catégorie A . On note B : « le dossier est retenu ». On sait $\mathbb{P}_A(B) = 0,75$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0,25$.

1. **Partie A – Arbre et probabilités de chemins.**

Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation, puis compléter toutes les probabilités complémentaires nécessaires. On conserve les notations A et B de l'énoncé.

2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

3. **Partie B – Probabilité totale et Bayes.**

En déduire $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.

4. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$ et interpréter le résultat.

Exercice 2 – Double contrôle de sécurité – indépendance et conditionnement

Deux contrôles de sécurité sont modélisés par deux événements indépendants A et B , avec $\mathbb{P}(A) = 0,35$ et $\mathbb{P}(B) = 0,40$.

1. **Partie A – Indépendance des contrôles.**

À partir des probabilités $\mathbb{P}(A) = 0,35$ et $\mathbb{P}(B) = 0,40$, expliquer ce que signifie l'hypothèse d'indépendance pour les deux contrôles.

2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

3. **Partie B – Union et conditionnement.**

Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

4. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ puis $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

Exercice 3 – Contrôle de composants – loi binomiale, moyenne et dispersion

Dans un atelier, chaque composant contrôlé est conforme avec une probabilité 0,30. On prélève 12 composants de manière assimilée à des tirages indépendants et on note X le nombre de composants conformes.

1. **Partie A – Loi binomiale et probabilité ponctuelle.**

Justifier que le nombre X de composants conformes parmi les 12 contrôlés suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 4)$, au dix-millième.

3. **Partie B – Espérance, variance et complément.**

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, puis la probabilité d'obtenir au moins un succès.

Exercice 4 – Campagne de prospection – au moins une réponse favorable

Une campagne de prospection obtient une réponse favorable avec une probabilité 0,15 à chaque contact. On réalise 8 contacts indépendants et on note X le nombre de réponses favorables.

1. **Partie A – Modélisation du nombre de réponses.**

Justifier la loi de X , nombre de réponses favorables parmi les 8 contacts indépendants.

2. Calculer la probabilité de n'obtenir aucun succès.
3. **Partie B – Événement contraire et comparaison.**
En déduire la probabilité d'obtenir au moins un succès.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$ et comparer ce résultat à $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Exercice 5 – Dépistage médical – faux positifs et valeur prédictive

Un laboratoire utilise un test de dépistage sur une population où 10 % des personnes sont atteintes. La sensibilité du test vaut 90 % et le taux de faux positifs 5 %. On veut mesurer la fiabilité d'un résultat positif ou négatif.

1. **Partie A – Qualité du test.**
Une maladie touche 10 % d'une population. Un test est positif chez 90 % des personnes malades et chez 5 % des personnes non malades. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un test positif.
3. **Partie B – Probabilités inverses.**
Une personne a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement malade.
4. Une personne a un test négatif. Calculer la probabilité qu'elle soit non malade.

Exercice 6 – Service après-vente – probabilité conditionnelle inconnue

Dans un service après-vente, $\mathbb{P}(A) = 0,30$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,80$ et la probabilité globale de résolution $\mathbb{P}(B) = 0,50$. On veut retrouver la probabilité de résolution hors catégorie A .

1. **Partie A – Branche conditionnelle inconnue.**
En posant $q = \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$, traduire la situation par un arbre pondéré puis établir l'équation vérifiée par q .
2. Déterminer exactement q , puis donner une valeur décimale.
3. **Partie B – Probabilités inverses et vérification.**
Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
4. Calculer $\mathbb{P}_B(\bar{A})$ de deux façons différentes et vérifier la cohérence.

Exercice 7 – Centre d'appels – intervalle de ventes et dispersion

Un centre d'appels transforme un contact en vente avec une probabilité 0,25. On étudie 20 contacts indépendants et on note X le nombre de ventes.

1. **Partie A – Probabilités de la loi.**
Justifier que X , nombre de ventes sur 20 contacts indépendants de probabilité de succès 0,25, suit une loi binomiale.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 5)$ puis $\mathbb{P}(X \leq 5)$, au dix-millième.
3. **Partie B – Intervalle et dispersion.**
Calculer $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 7)$, au dix-millième.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 8 – Détection d'anomalies – seuil de probabilité à 95 %

Un dispositif détecte une anomalie avec une probabilité 0,08 à chaque essai indépendant. Pour n essais, X_n désigne le nombre de détections.

1. Partie A – Probabilité d’au moins une détection.

Pour n essais indépendants, introduire X_n , nombre de détections, et justifier sa loi.

2. Exprimer $\mathbb{P}(X_n \geq 1)$ en fonction de n .

3. Partie B – Recherche du nombre minimal d’essais.

Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(X_n \geq 1) \geq 0,95$.

4. Vérifier numériquement que l’entier précédent convient et que l’entier juste inférieur ne convient pas.

Exercice 9 – Trois fournisseurs – origine d’un défaut et contrôle de lot

Une entreprise reçoit des composants de trois fournisseurs A, B et C avec des proportions et des taux de défaut différents. On souhaite identifier l’origine probable d’un composant défectueux puis étudier un échantillon de 50 composants.

1. Partie A – Origine d’un défaut.

Un stock provient des fournisseurs A, B, C dans les proportions 0,50, 0,30 et 0,20. Les probabilités de défaut sont respectivement 0,02, 0,04 et 0,08. Calculer la probabilité p_D qu’un article soit défectueux.

2. Un article est défectueux. Calculer la probabilité qu’il provienne de C.

3. Partie B – Contrôle d’un échantillon.

Un article n’est pas défectueux. Calculer la probabilité qu’il provienne de A.

4. On prélève 50 articles de manière assimilée à des tirages indépendants. Si X compte les articles défectueux, donner sa loi et son espérance.

Exercice 10 – Deux agences – somme de binomiales de même paramètre

Deux agences traitent respectivement 10 et 15 dossiers. Chaque dossier est accepté avec la même probabilité 0,40, indépendamment des autres. On note X et Y les nombres d’acceptations et $S = X + Y$.

1. Partie A – Somme de deux groupes indépendants.

Justifier les lois de X et Y , puis expliquer pourquoi l’égalité des paramètres de succès permet d’envisager une loi binomiale pour le total $S = X + Y$.

2. Justifier que S suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

3. Partie B – Loi du total et probabilité.

Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$ de deux façons.

4. Calculer $\mathbb{P}(S \geq 12)$, au dix-millième.

Exercice 11 – Campagne de dépistage – Bayes puis nombre de tests positifs

Une campagne de dépistage concerne une maladie rare. Le test possède une sensibilité élevée mais produit aussi des faux positifs. Après l’étude de la valeur prédictive positive, on examine le nombre de tests positifs sur un groupe de 100 personnes.

1. Partie A – Test positif et Bayes.

Une maladie touche 3 % d’une population. Un test est positif chez 95 % des malades et chez 2 % des non-malades. Calculer la probabilité p_+ qu’un test soit positif.

2. Une personne a un test positif. Calculer la probabilité qu’elle soit malade.

3. Partie B – Nombre de tests positifs.

On teste 100 personnes indépendantes choisies dans cette population. Si X compte les tests positifs, justifier la loi de X .

4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 8)$, au dix-millième.

Exercice 12 – Trois lignes de production – origine d'un produit non conforme

Une usine utilise trois lignes de production A, B et C, de parts de production différentes et de taux de conformité différents. L'objectif est d'identifier l'origine probable d'un produit non conforme puis d'étudier un contrôle de 30 produits.

1. Partie A – Origine d'un produit non conforme.

Une production provient de trois lignes A, B, C dans les proportions 0,50, 0,30, 0,20. Leurs probabilités de conformité sont 0,98, 0,95, 0,90. Calculer la probabilité qu'un produit soit conforme.

2. Un produit est non conforme. Calculer la probabilité qu'il provienne de C.

3. Partie B – Contrôle de 30 produits.

On contrôle 30 produits indépendants. Si X compte les produits non conformes, donner la loi de X .

4. Calculer la probabilité d'avoir au plus un produit non conforme.

Exercice 13 – Incidents sur dix jours – conditionnement d'une loi binomiale

Sur une période de dix jours, un système peut rencontrer un incident avec une probabilité constante 0,20 par jour, indépendamment des autres jours. On note X le nombre total d'incidents. On conditionne ensuite l'étude au fait qu'au moins un incident ait eu lieu.

1. Partie A – Probabilités de la loi.

On suppose $X \sim \mathcal{B}(10, 0,20)$. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

3. Partie B – Conditionnement.

Calculer $\mathbb{P}(X = 2 \mid X \geq 1)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$, puis expliquer pourquoi le conditionnement précédent augmente la probabilité relative du cas $X = 2$.

Exercice 14 – Opération commerciale – seuil pour au moins deux réussites

Une opération commerciale réussit avec une probabilité de 0,10 à chaque tentative indépendante. La direction veut déterminer combien de tentatives sont nécessaires pour obtenir au moins deux réussites avec une probabilité d'au moins 90 %.

1. Partie A – Expression de l'événement.

Chaque essai réussit avec probabilité 0,10, indépendamment des autres. Pour n essais, on note X_n le nombre de succès. Exprimer $\mathbb{P}(X_n \geq 2)$ en fonction de n .

2. Expliquer pourquoi la recherche du plus petit n tel que $\mathbb{P}(X_n \geq 2) \geq 0,90$ ne se réduit pas au seul événement $X_n = 0$.

3. Partie B – Recherche et vérification du seuil.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n vérifiant la condition.

4. Vérifier le caractère minimal en donnant les probabilités pour $n = 37$ et $n = 38$.

Exercice 15 – Contrôle qualité – retrouver n et p à partir de E(X) et V(X)

Un responsable qualité sait seulement que le nombre X de défauts suit une loi binomiale. Les valeurs de l'espérance et de la variance ont été relevées expérimentalement et doivent permettre de retrouver les

paramètres de la loi.

1. Partie A – Retrouver les paramètres.

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On sait que $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\text{Var}(X) = 4,2$. Écrire deux équations vérifiées par n et p .

2. Déterminer p , puis n .

3. Partie B – Exploiter la loi obtenue.

Calculer l'écart-type de X .

4. Pour la loi binomiale ainsi déterminée, calculer $\mathbb{P}(X \geq 8)$, au dix-millième.

Exercice 16 – Deux machines – somme indépendante à paramètres différents

Deux machines indépendantes réalisent des contrôles de nature différente. Le nombre de réussites de la première suit $\mathcal{B}(12; 0,30)$ et celui de la seconde $\mathcal{B}(8; 0,60)$. On étudie leur total S .

1. Partie A – Espérance et variance d'une somme.

On considère deux variables indépendantes $X \sim \mathcal{B}(12, 0,30)$ et $Y \sim \mathcal{B}(8, 0,60)$. On pose $S = X + Y$. Expliquer pourquoi on ne peut pas identifier directement S à une loi binomiale unique.

2. Calculer $\mathbb{E}(S)$.

3. Partie B – Concentration.

Calculer $\text{Var}(S)$.

4. Utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev pour minorer $\mathbb{P}(|S - 8,4| < 4)$.

Exercice 17 – Deux ateliers – taux inconnu puis contrôle d'un prélèvement

Deux ateliers A et B alimentent une même production. Le taux global de défaut est connu, de même que la part et le taux de défaut de l'atelier A. Il faut d'abord retrouver le taux de défaut de B puis étudier un prélèvement de 40 pièces.

1. Partie A – Retrouver le taux de l'atelier B.

Un atelier A fournit 65 % des pièces et présente 3 % de défauts. L'atelier B fournit le reste avec un taux de défaut q . Le taux global de défaut est 5 %. Déterminer q .

2. Une pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de B.

3. Partie B – Contrôle d'un prélèvement.

On prélève 40 pièces indépendantes dans la production globale. Si X compte les pièces défectueuses, donner la loi de X .

4. Calculer la probabilité d'obtenir au plus une pièce défectueuse.

Exercice 18 – Plan d'acceptation – quantile binomial à 95 %

Un plan de contrôle accepte ou refuse un lot à partir du nombre de pièces défectueuses observées dans un échantillon de 50 pièces. Le taux de défaut de référence est 4 %. On veut définir une règle d'acceptation correspondant à un niveau de 95 %.

1. Partie A – Loi du nombre de défauts.

Dans un lot, chaque pièce est défectueuse avec probabilité 0,04, indépendamment des autres. On contrôle 50 pièces et X compte les défauts. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$.

3. Partie B – Construction d'une règle d'acceptation.

Déterminer le plus petit entier c tel que $\mathbb{P}(X \leq c) \geq 0,95$.

- Interpréter la règle « accepter le lot si $X \leq c$ » lorsque le taux réel de défaut est bien 4 %.

Exercice 19 – Jeu à deux modes – loi binomiale et gain total

À chaque partie, un joueur choisit aléatoirement l'un de deux modes de jeu dont les probabilités de victoire sont différentes. Après avoir déterminé la probabilité globale de victoire, on étudie 25 parties puis un gain affine dépendant du nombre de victoires.

1. Partie A – Probabilité de victoire et loi de X.

À chaque partie, un joueur choisit aléatoirement le mode A avec probabilité 0,30 et le mode B avec probabilité 0,70. Il gagne avec probabilité 0,60 en mode A et 0,20 en mode B . Calculer la probabilité p de gagner une partie.

- Il joue 25 parties indépendantes. Si X compte les victoires, donner sa loi et calculer $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.

3. Partie B – Gain aléatoire.

Calculer $\mathbb{P}(8 \leq X \leq 12)$, au dix-millième.

- Chaque victoire rapporte 5 points et chaque défaite fait perdre 2 points. Exprimer le gain total G en fonction de X , puis calculer $\mathbb{E}(G)$ et $\text{Var}(G)$.

Exercice 20 – Enquête statistique – fréquence aléatoire et concentration

Dans une enquête, chaque réponse favorable est modélisée par une variable de Bernoulli de paramètre 0,40. La fréquence observée F_n est étudiée au moyen de son espérance, de sa variance et d'une borne de concentration.

1. Partie A – Espérance et variance d'une fréquence.

On considère n variables de Bernoulli indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de paramètre $p = 0,40$, et la fréquence $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Calculer $\mathbb{E}(F_n)$.

- Calculer $\text{Var}(F_n)$.

3. Partie B – Bienaymé–Tchebychev.

À l'aide de Bienaymé–Tchebychev, minorer $\mathbb{P}(|F_n - 0,40| < 0,05)$.

- Déterminer un entier n suffisant pour que cette minoration soit au moins 0,95, puis commenter une fréquence observée 0,43 pour $n = 2000$.

Exercice 21 – Admission dans une école – Bayes, binomiale et seuil

Une école utilise deux voies de sélection. La probabilité d'admission dépend de la voie empruntée. Après un calcul de Bayes, on étudie le nombre d'admis parmi plusieurs candidats indépendants et un seuil de taille de groupe.

1. Partie A – Admission et Bayes.

Une école sélectionne 10 % des candidats sur dossier. La probabilité d'admission est 0,60 pour un candidat sélectionné sur dossier et 0,20 sinon. Calculer la probabilité globale p d'admission et $\mathbb{P}_A(\overline{D})$, où A signifie « admis ».

- Pour 7 candidats indépendants, X compte les admis. Donner la loi de X , puis calculer $\mathbb{P}(X = 1)$.

3. Partie B – Binomiale et seuil.

Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

- Déterminer le plus petit nombre n de candidats pour lequel la probabilité d'au moins une admission est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 22 – Filtre anti-spam – valeur prédictive et répétitions

Un filtre anti-spam classe les courriels selon leur nature réelle. On étudie sa valeur prédictive lorsqu'un courriel est classé indésirable, puis le nombre de spams présents dans une série de courriels indépendants.

1. Partie A – Fiabilité du filtre.

Dans une messagerie, 8 % des courriels sont des spams. Un spam est classé indésirable avec probabilité 0,90, et un courriel normal est classé à tort indésirable avec probabilité 0,01. Calculer $\mathbb{P}(I)$, où I signifie « classé indésirable ».

2. Calculer $\mathbb{P}_I(S)$, où S signifie « spam ».

3. Partie B – Répétitions et seuil.

On observe 50 courriels indépendants et Z compte les spams réels. Donner la loi de Z et calculer $\mathbb{P}(Z \geq 2)$.

4. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'observer au moins un spam parmi n courriels est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 23 – Processus de validation – Bayes inversé et branche inconnue

Deux événements A et B décrivent deux étapes d'un processus de validation. On connaît $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}_A(B)$ et la probabilité inverse $\mathbb{P}_B(A)$. Il faut reconstituer une branche inconnue, puis utiliser la probabilité obtenue dans une expérience binomiale.

1. Partie A – Reconstituer les probabilités.

On sait $\mathbb{P}(A) = 0,40$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,80$ et $\mathbb{P}_B(A) = 0,64$. Déterminer $\mathbb{P}(B)$.

2. En déduire $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$.

3. Partie B – Modèle binomial.

On répète ensuite 30 expériences indépendantes dans lesquelles l'événement B a la probabilité trouvée. Si X compte les réalisations de B , donner la loi de X .

4. Calculer $\mathbb{P}(12 \leq X \leq 18)$, au dix-millième.

Exercice 24 – Campagne d'invitations – optimiser la probabilité d'un unique succès

Une campagne envoie 20 invitations indépendantes. Chaque invitation reçoit une réponse positive avec une probabilité p inconnue. On cherche la valeur de p qui rend l'événement « exactement une réponse positive » le plus probable possible.

1. Partie A – Probabilité en fonction de p .

Pour $p \in]0; 1[$, on considère $X_p \sim \mathcal{B}(20, p)$. Exprimer $f(p) = \mathbb{P}(X_p = 1)$.

2. Calculer $f'(p)$ et factoriser son expression.

3. Partie B – Optimisation.

Déterminer la valeur de p qui maximise $f(p)$ sur $]0; 1[$.

4. Calculer la probabilité maximale et interpréter le résultat.

Exercice 25 – Événement rare – quantile binomial et décision au seuil 5 %

Un procédé produit un événement rare avec probabilité 0,03 sur chacun de 200 essais indépendants. On veut établir un seuil de contrôle à 95 %, puis décider si une observation de 12 événements doit être considérée comme inhabituelle.

1. Partie A – Quantile à 95 %.

On suppose $X \sim \mathcal{B}(200, 0,03)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

2. Déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0,95$.
3. **Partie B – Observation inhabituelle.**
Vérifier le caractère minimal en donnant $\mathbb{P}(X \leq 9)$ et $\mathbb{P}(X \leq 10)$.
4. On observe 12 succès. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 12)$ et discuter le caractère inhabituel de l'observation au seuil 5 %.

Exercice 26 – Tests médicaux répétés – mise à jour bayésienne

Une maladie rare est dépistée par un test imparfait. Le même individu réalise plusieurs tests que l'on suppose indépendants conditionnellement à son état réel. On étudie comment plusieurs résultats positifs successifs modifient la probabilité d'être malade.

1. **Partie A – Un puis deux tests positifs.**
Une maladie touche 1 % d'une population. Un test a une sensibilité 0,90 et un taux de faux positif 0,05. Calculer la probabilité d'être malade après un seul test positif.
2. On suppose que deux tests sont indépendants conditionnellement à l'état « malade / non malade ». Calculer la probabilité d'obtenir deux tests positifs.
3. **Partie B – Trois tests et interprétation.**
Calculer la probabilité d'être malade sachant que les deux tests sont positifs.
4. Effectuer le même calcul après trois tests positifs et commenter l'évolution.

Exercice 27 – Deux ateliers – somme binomiale et conditionnement sur le total

Deux ateliers réalisent respectivement 30 et 20 essais de Bernoulli de même paramètre 0,20. On note X et Y les nombres de succès et $S=X+Y$. L'étude porte ensuite sur la répartition des succès entre les deux ateliers sachant le total observé.

1. **Partie A – Loi du total.**
On considère $X \sim \mathcal{B}(30, 0,20)$ et $Y \sim \mathcal{B}(20, 0,20)$, indépendantes, puis $S = X + Y$. Justifier la loi de S .
2. Calculer $\mathbb{P}(S = 10)$.
3. **Partie B – Conditionnement sachant le total.**
Exprimer $\mathbb{P}(X = 6 \cap S = 10)$ à l'aide de X et Y .
4. En déduire $\mathbb{P}(X = 6 \mid S = 10)$ et montrer que le paramètre 0,20 se simplifie.

Exercice 28 – Fournisseurs de tomates – taux inconnu et concentration

Un stock de tomates provient de deux fournisseurs. La proportion globale de tomates commercialisables est connue, ainsi que le taux chez le premier fournisseur. Après avoir retrouvé le second taux, on étudie une fréquence de non-conformité et sa concentration.

1. **Partie A – Origine et commercialisation.**
Un stock provient à 60 % du fournisseur A et à 40 % de B . Au total 91 % des tomates sont commercialisables, et 95 % de celles de A le sont. Déterminer $\mathbb{P}_B(C)$, où C signifie « commercialisable », puis comparer l'origine d'une tomate non commercialisable.
2. On prélève 15 tomates indépendantes. Si X compte les non-commercialisables, donner la loi de X , puis calculer $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
3. **Partie B – Fréquence et concentration.**
Pour un échantillon de taille n , on note $F_n = X_n/n$, avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, 0,09)$. Calculer $\mathbb{E}(F_n)$ et $\text{Var}(F_n)$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$, puis déterminer un entier n suffisant pour que cette borne

soit au moins 0,95.

Exercice 29 – Deux familles de capteurs – somme non binomiale et concentration

Deux familles de capteurs présentent des probabilités de défaillance différentes. Les défaillances sont indépendantes. On étudie le nombre total de capteurs défaillants, sa dispersion et une borne de concentration.

1. Partie A – Somme hétérogène.

On contrôle 40 capteurs de type A , chacun défaillant avec probabilité 0,10, et 60 capteurs de type B , chacun défaillant avec probabilité 0,20. Toutes les défaillances sont supposées indépendantes. Si X et Y comptent les défaillances dans chaque type et $S = X + Y$, donner les lois de X et Y et expliquer pourquoi S n'est pas une binomiale simple.

2. En déduire l'espérance du nombre total de défaillances S .

3. Partie B – Concentration et comparaison.

Calculer $\text{Var}(S)$, puis minorer $\mathbb{P}(|S - 16| < 8)$ par Bienaymé–Tchebychev.

4. Écrire une expression exacte de $\mathbb{P}(9 \leq S \leq 23)$ sous forme de somme utilisant les lois de X et Y , puis comparer qualitativement cette probabilité exacte à la borne de Tchebychev.

Exercice 30 – Synthèse Bac – trois canaux, Bayes, binomiale et seuil

Un système répartit les opérations sur trois canaux dont les taux de réussite sont différents. L'exercice combine probabilités totales, Bayes, modélisation binomiale, espérance, variance et recherche d'un seuil.

1. Partie A – Arbre et Bayes.

Un système traite les opérations par trois canaux A, B, C avec probabilités 0,50, 0,30, 0,20. Les probabilités de réussite sont respectivement 0,96, 0,90, 0,80. Calculer la probabilité globale de réussite puis la probabilité qu'une opération ayant échoué provienne de C .

2. On observe 60 opérations indépendantes. Si X compte les échecs, donner la loi de X , son espérance et sa variance.

3. Partie B – Binomiale, dispersion et seuil.

Calculer $\mathbb{P}(X \leq 4)$, au dix-millième.

4. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'observer au moins un échec parmi n opérations est supérieure ou égale à 0,99.