

Exercices – Primitives et équations différentielles

Exercice 1 – Primitive polynomiale – famille et condition initiale

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 5$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'unique primitive G telle que $G(1) = 2$.
4. Vérifier le résultat obtenu en calculant $G'(x)$.

Exercice 2 – Forme u'/u – logarithme et domaine

On considère $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x^2 + 3x + 5 > 0$ pour tout réel x .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive G telle que $G(0) = 1$.
4. Vérifier directement que $G'(x) = f(x)$.

Exercice 3 – Forme $u'e^u$ – exponentielle composée

On considère $f(x) = (4x-2)e^{2x^2-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Identifier une fonction u telle que $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f .
3. Déterminer la primitive F_0 telle que $F_0(0) = 0$.
4. Vérifier la primitive obtenue par dérivation.

Exercice 4 – Forme $u'/\sqrt{u}$ – primitive composée

On considère $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2+2x+5}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f .
3. Déterminer la primitive G telle que $G(0) = 1$.
4. Vérifier le résultat en dérivant G .

Exercice 5 – Équation $y' = ay + b$ – équilibre, solution et limite

On considère le problème $y' = -2y + 8$ avec $y(0) = 1$.

1. Déterminer la solution constante, appelée valeur d'équilibre.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y + 8$.

3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.
4. Étudier son sens de variation sur $[0; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 6 – Primitives trigonométriques composées

On considère $f(x) = 3\cos(3x) - 2\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une primitive F de f .
2. Donner l'ensemble des primitives de f .
3. Déterminer l'unique primitive G telle que $G(0) = 0$.
4. Vérifier $G'(x) = f(x)$ en faisant apparaître les facteurs issus des compositions.

Exercice 7 – Primitive logarithmique – intervalle et condition

On considère $f(x) = \frac{4}{2x-1}$ sur l'intervalle $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

1. Expliquer pourquoi $\ln(2x-1)$ est bien défini sur I .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur I .
3. Déterminer la primitive F telle que $F(1) = 3$.
4. Expliquer ce qui doit être modifié si l'on travaille sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$.

Exercice 8 – Vérifier une primitive proposée – produit exponentiel

On pose $G(x) = (2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $G'(x)$ et montrer que $G'(x) = 4xe^{2x}$.
2. En déduire une primitive de $g(x) = 4xe^{2x}$.
3. Donner l'ensemble des primitives de g .
4. Déterminer la primitive G_0 de g telle que $G_0(0) = 4$.

Exercice 9 – Équation différentielle instable – condition initiale et comportement

On considère $y' = 3y + 6$ avec $y(0) = -1$.

1. Déterminer la valeur d'équilibre.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. Déterminer la solution correspondant à $y(0) = -1$.
4. Étudier son sens de variation sur $[0; +\infty[$ et sa limite.

Exercice 10 – Méthode d'Euler – comparer approximation et solution exacte

On considère $y' = -y + 4$, $y(0) = 1$. On applique la méthode d'Euler avec le pas $h = 0,5$.

1. Établir la relation de récurrence vérifiée par les approximations y_n aux abscisses $x_n = 0,5n$.
2. Calculer y_1 puis y_2 .

3. Déterminer la solution exacte du problème différentiel.
4. Comparer y_2 à la valeur exacte $y(1)$ et calculer l'erreur absolue.

Exercice 11 – Primitive proposée avec paramètre – identifier les coefficients

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $F_a(x) = (x + a)e^{2x}$. On veut que F_a soit une primitive de $f(x) = (2x + 5)e^{2x}$.

1. Calculer $F'_a(x)$.
2. Déterminer la valeur de a pour laquelle $F'_a(x) = f(x)$ pour tout réel x .
3. Donner alors l'ensemble des primitives de f .
4. Déterminer l'unique primitive H telle que $H(0) = 0$.

Exercice 12 – Primitive logarithmique normalisée – calcul exact

On considère $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $x^2 + x + 3$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les primitives de f .
3. Déterminer la primitive F_0 telle que $F_0(0) = 2$.
4. Calculer $F_0(1)$ sous forme exacte.

Exercice 13 – Démonstration – deux primitives diffèrent d'une constante

Soit f continue sur un intervalle I . Soient F et G deux primitives de f sur I .

1. On pose $H = F - G$. Calculer H' sur I .
2. En déduire que H est constante sur I .
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$ sur I .
4. En déduire que si $F(x_0) = G(x_0)$ pour un $x_0 \in I$, alors $F = G$ sur tout I .

Exercice 14 – Démonstration – résolution de $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une fonction dérivable y solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$.

1. Poser $z(x) = e^{-ax}y(x)$ et calculer $z'(x)$.
2. En déduire que z est constante.
3. Démontrer que toutes les solutions de $y' = ay$ sont de la forme $y(x) = Ce^{ax}$.
4. Résoudre $y' = -3y$ avec $y(2) = 5$.

Exercice 15 – Modèle de stabilisation – seuil exact

Une grandeur T vérifie $T' = -0,4T + 6$ avec $T(0) = 30$.

1. Déterminer la valeur d'équilibre du modèle.
2. Déterminer l'expression de $T(t)$.
3. Étudier le sens de variation de T et interpréter sa limite.

- Déterminer le premier instant réel à partir duquel $T(t) < 16$.

Exercice 16 – Croissance avec apport constant – seuil et divergence

On considère $y' = 0,2y + 10$ avec $y(0) = 50$.

- Déterminer la solution constante de l'équation.
- Résoudre le problème avec condition initiale.
- Étudier les variations et la limite en $+\infty$.
- Déterminer le premier instant réel pour lequel $y(t) > 200$.

Exercice 17 – Équation $y' = ay + f$ – solution particulière exponentielle

On considère $y' = 2y + e^{3x}$. On admet que $y_p(x) = e^{3x}$ est une solution particulière.

- Vérifier que y_p est bien une solution particulière.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle.
- Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$.
- Montrer que cette solution est strictement positive pour tout $x > 0$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 18 – Équation forcée trigonométrique – solution particulière donnée

On considère $y' = -y + \sin x$. On pose $y_p(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}$.

- Vérifier que y_p est une solution particulière.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle.
- Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.
- Montrer que cette solution est bornée sur $[0; +\infty[$.

Exercice 19 – Paramètre et équilibre imposé – modèle stable

Pour $k > 0$, on considère $y' = -ky + 12$ avec $y(0) = 0$.

- Déterminer la valeur d'équilibre en fonction de k .
- Déterminer k pour que la limite de la solution soit égale à 3.
- Pour cette valeur de k , déterminer la solution exacte.
- Déterminer le premier instant réel à partir duquel $y(t) > 2,9$.

Exercice 20 – Euler et écart à l'équilibre – calcul itératif

On considère $y' = -2y + 6$, $y(0) = 0$, et la méthode d'Euler de pas $h = 0,25$.

- Montrer que les approximations vérifient $y_{n+1} = 0,5y_n + 1,5$.
- Calculer y_1, y_2, y_3, y_4 .
- Montrer que $3 - y_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Déterminer le premier entier n tel que $|y_n - 3| < 10^{-2}$, puis donner le temps correspondant.

Exercice 21 – Identifier une primitive de forme $(ax + b)e^{x^2+x}$

On considère $f(x) = \left(6x^2 + 4x + \frac{7}{2}\right)e^{x^2+x}$. On cherche une primitive sous la forme $F(x) = (ax + b)e^{x^2+x}$.

1. Calculer $F'(x)$ en fonction de a et b .
2. Déterminer a et b pour que $F' = f$.
3. Donner l'ensemble des primitives de f .
4. Déterminer la primitive G telle que $G(0) = 0$.

Exercice 22 – Composition trigonométrique-logarithmique – normalisation

On considère $f(x) = \frac{2 \cos(2x)}{3 + \sin(2x)}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $3 + \sin(2x) > 0$ pour tout réel x .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f .
3. Déterminer la primitive F telle que $F(\pi/4) = 0$.
4. Calculer $F(0)$ sous la forme d'un seul logarithme.

Exercice 23 – Famille de primitives avec paramètre – condition logarithmique

Pour $m \in]-4; 4[$, on définit $f_m(x) = \frac{2x + m}{x^2 + mx + 4}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x^2 + mx + 4 > 0$ pour tout réel x .
2. Déterminer la primitive F_m telle que $F_m(0) = 0$.
3. Exprimer $F_m(1)$ en fonction de m .
4. Déterminer m pour que $F_m(1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 24 – Retrouver une équation différentielle à partir d'une trajectoire

Une trajectoire est donnée par $y(t) = 20 + 60e^{-kt}$, avec $k > 0$. On sait de plus que $y'(0) = -12$.

1. Déterminer k .
2. Montrer que la trajectoire vérifie une équation différentielle $y' = ay + b$ et déterminer a et b .
3. Retrouver la valeur initiale et la valeur d'équilibre.
4. Déterminer le premier instant réel pour lequel $y(t) < 25$.

Exercice 25 – Famille d'équations – paramètre déterminé à un instant

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $y' = -2y + 2a$ avec $y(0) = 1$.

1. Exprimer la solution $y_a(x)$ en fonction de a .

2. Déterminer a pour que $y_a(\ln 2) = \frac{7}{4}$.
3. Pour la valeur de a obtenue, étudier le sens de variation de la solution.
4. Déterminer sa limite en $+\infty$ et interpréter le rôle de a .

Exercice 26 – Refroidissement – identifier le paramètre à partir d'une mesure

Une température T vérifie $T' = -k(T - 20)$, avec $k > 0$, $T(0) = 80$ et $T(10) = 50$.

1. Exprimer $T(t)$ en fonction de k .
2. Déterminer exactement k .
3. Écrire alors l'expression exacte de $T(t)$.
4. Déterminer le premier instant réel pour lequel $T(t) < 25$.

Exercice 27 – Perfusion à débit constant – équilibre et seuil

La concentration $C(t)$ d'un produit est modélisée par $C' = -0,5C + 4$, avec $C(0) = 0$.

1. Déterminer la concentration d'équilibre.
2. Résoudre le problème différentiel.
3. Montrer que C est croissante et majorée par son équilibre.
4. Déterminer le premier instant réel pour lequel $C(t) > 7,5$.

Exercice 28 – Équation $y' = ay + f$ – particulière polynomiale donnée

On considère $y' = -y + x^2 + 2x + 2$. On pose $y_p(x) = x^2 + 2$.

1. Vérifier que y_p est une solution particulière.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation.
3. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.
4. Étudier $y(x) - x^2$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 29 – Méthode d'Euler – modèle de croissance et contrôle de l'erreur

On considère $y' = 0,5y + 1$, $y(0) = 2$. On applique Euler avec le pas $h = 0,2$.

1. Établir la relation de récurrence pour les approximations y_n aux instants $x_n = 0,2n$.
2. Calculer y_1, y_2, y_3 .
3. Déterminer la solution exacte du problème différentiel.
4. Comparer y_3 à $y(0,6)$ et donner l'erreur absolue à 10^{-3} près.

Exercice 30 – Synthèse Bac – primitive puis équation forcée

On pose $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. On considère ensuite l'équation différentielle

$$y' = -2y + 2\ln(x^2 + x + 1) + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

1. Montrer que F est la primitive de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ qui s'annule en 0.
2. Vérifier que F est une solution particulière de l'équation différentielle.
3. Déterminer la solution y vérifiant $y(0) = 3$.
4. Déterminer le premier réel $x \geq 0$ à partir duquel $|y(x) - F(x)| < 10^{-3}$.