

Exercices – Orthogonalité et distances dans l'espace

Exercice 1 – Produit scalaire, longueurs et angle

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère $A(1; 2; 0)$, $B(4; -1; 3)$ et $C(2; 1; 4)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les longueurs AB et AC .
4. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$, puis préciser si l'angle est droit.

Exercice 2 – Orthogonalité et triangle rectangle

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0; 0; 0)$, $B(2; 1; -1)$ et $C(1; -2; 0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
3. Calculer AB et AC .
4. En déduire la nature du triangle ABC et calculer son aire.

Exercice 3 – Plan défini par un point et une normale

On considère le point $A(1; -2; 3)$ et le vecteur non nul $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}$.
2. Vérifier si $B(0; 1; 4)$ appartient à $\mathcal{P}$.
3. Vérifier si $C(2; -1; 5)$ appartient à $\mathcal{P}$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par C et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

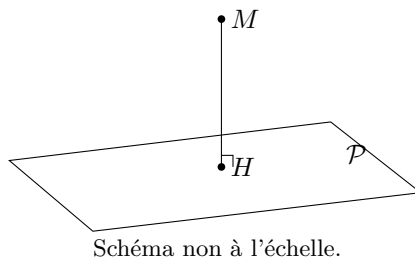
Exercice 4 – Projeté orthogonal d'un point sur une droite

La droite (d) passe par $A(0; 1; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; 2)$. On considère $M(2; 0; 3)$.

1. Écrire les coordonnées d'un point H quelconque de (d) en fonction d'un réel t .
2. Traduire la condition pour que H soit le projeté orthogonal de M sur (d) , puis déterminer t .
3. Donner les coordonnées exactes de H .
4. Calculer la distance de M à la droite (d) .

Exercice 5 – Projeté orthogonal sur un plan

On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z + 3 = 0$ et le point $M(1; 2; -1)$.



1. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Écrire la droite passant par M et dirigée par cette normale, puis exprimer un point H de cette droite.
3. Déterminer H pour que $H \in \mathcal{P}$, et justifier qu'il s'agit du projeté orthogonal de M .
4. Calculer $d(M, \mathcal{P})$.

Exercice 6 – Droite strictement parallèle à un plan

On considère la droite (d) passant par $A(2; 1; 3)$, de vecteur directeur $\vec{u} = (1; -2; 1)$, et le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 5 = 0$.

1. Donner une normale $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ et calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$.
2. Déterminer la position relative de (d) et de $\mathcal{P}$.
3. Construire le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.
4. En déduire la distance de la droite (d) au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 7 – Deux plans perpendiculaires et leur intersection

On considère $\mathcal{P} : x + y + z - 2 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y = 0$.

1. Donner des vecteurs normaux $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$.
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires.
3. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (d) .
4. Vérifier qu'un vecteur directeur de (d) est orthogonal aux deux normales.

Exercice 8 – Plan médiateur d'un segment

On considère $A(1; -1; 2)$ et $B(5; 3; 0)$. On cherche le lieu des points $M(x; y; z)$ tels que $MA = MB$.

1. Calculer le milieu I de $[AB]$ et le vecteur $\vec{AB}$.
2. Expliquer pourquoi le lieu cherché est un plan passant par I et normal à $\vec{AB}$.
3. Déterminer une équation cartésienne simplifiée de ce plan médiateur.
4. Vérifier directement que I appartient au plan obtenu et que A et B sont situés de part et d'autre.

Exercice 9 – Triangle rectangle, aire et plan support

On considère $A(1; 0; 0)$, $B(3; 1; 2)$ et $C(2; 0; -1)$.

1. Calculer $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2. Calculer l'aire du triangle ABC .
3. Vérifier que $\vec{n} = (1; -4; 1)$ est normal au plan (ABC) .
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice 10 – Tétraèdre : hauteur et volume

On reprend le triangle ABC de l'exercice précédent et on considère $S(2; -4; 1)$.

1. Montrer que $\vec{AS} = (1; -4; 1)$ est normal au plan (ABC) .
2. Justifier que A est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) , puis calculer la hauteur du tétraèdre $SABC$.
3. Calculer l'aire de la base ABC .
4. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.

Exercice 11 – Pavé droit : plan diagonal et distance

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$ et $E(0; 0; 2)$.

1. Vérifier que $\vec{n} = (3; 4; 6)$ est normal au plan (BDE) .
2. Déterminer une équation cartésienne de (BDE) .
3. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur (BDE) .
4. Calculer la distance $d(A, (BDE))$.

Exercice 12 – Prouver qu'une droite est perpendiculaire à un plan

On considère $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 1; 1)$, ainsi que le point $S(2; 3; 1)$. On note $\vec{n} = (0; 1; -1)$.

1. Montrer que les points A, B, C définissent un plan.
2. Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .
3. On considère la droite passant par S et dirigée par $\vec{n}$. Déterminer son point d'intersection H avec (ABC) .
4. En déduire la distance de S au plan (ABC) .

Exercice 13 – Plan par trois points puis projection

On considère $A(1; -1; 0)$, $B(3; 0; 2)$, $C(0; 2; 1)$ et $M(2; 1; 4)$.

1. Vérifier que $\vec{n} = (-5; -4; 7)$ est normal au plan (ABC) .
2. Déterminer une équation cartésienne de (ABC) .
3. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur (ABC) .
4. Calculer $d(M, (ABC))$.

Exercice 14 – Projection sur une droite : calcul exact

La droite (d) passe par $A(1; -1; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = (2; 1; -1)$. On considère $M(3; 2; 0)$.

1. Écrire un point H de (d) sous la forme $A + t\vec{u}$.
2. Déterminer t pour que $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$.
3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal H .
4. Calculer la distance $d(M, (d))$.

Exercice 15 – Pourquoi le projeté est le point le plus proche

On considère $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 4 = 0$ et $M(3; 1; 4)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$.
2. Calculer MH .
3. Soit X un point quelconque de $\mathcal{P}$. Montrer que $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{HX}$.
4. En déduire que H est l'unique point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

Exercice 16 – Construire un plan contenant une droite et perpendiculaire à un autre plan

On considère le plan $\mathcal{P} : x + 2y - z + 1 = 0$, le point $A(1; 0; 0)$ et la direction $\vec{u} = (1; 0; 1)$. On cherche un plan $\mathcal{Q}$ passant par A , contenant la droite de direction $\vec{u}$, et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\vec{u}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}_Q = (a; b; c)$ à $\mathcal{Q}$ en traduisant les deux contraintes d'orthogonalité.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Exercice 17 – Distance entre deux plans parallèles par projection

On considère $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x - y + 2z + 8 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont strictement parallèles.
2. Choisir un point simple $A \in \mathcal{P}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{Q}$.
4. En déduire la distance entre les deux plans.

Exercice 18 – Approfondissement – sphère et plan sécant

On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $O(1; -1; 2)$ et de rayon 5, ainsi que le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 6 = 0$.

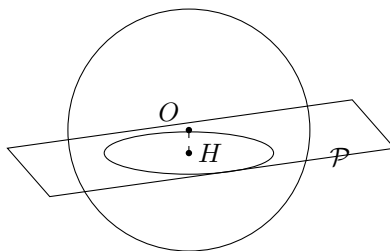


Schéma non à l'échelle.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de O sur $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance OH .
3. Justifier que $\mathcal{P}$ coupe la sphère suivant un cercle.
4. Calculer le rayon exact de ce cercle d'intersection.

Exercice 19 – Approfondissement – plan tangent à une sphère

La sphère $\mathcal{S}$ a pour centre $C(1; 2; 3)$ et pour rayon 3. On considère le point $A(2; 4; 5)$.

1. Vérifier que A appartient à $\mathcal{S}$.
2. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{CA}$ est normal au plan tangent à la sphère en A .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent $\mathcal{T}$ en A .
4. En construisant le projeté de C sur $\mathcal{T}$, vérifier que la distance de C à $\mathcal{T}$ vaut le rayon de la sphère.

Exercice 20 – Synthèse Bac – rectangle incliné et pyramide

Dans un repère orthonormé, on considère $A(1; 1; 1)$, $B(3; 2; 3)$, $D(2; -1; 1)$, $C(4; 0; 3)$ et $K(5; 3; -4)$.

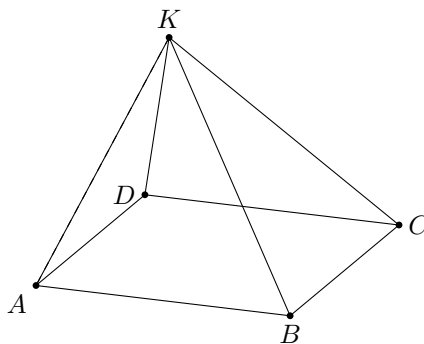


Schéma non à l'échelle.

1. Montrer que $ABCD$ est un rectangle et calculer son aire.
2. Vérifier que $\vec{n} = (4; 2; -5)$ est normal au plan $(ABCD)$.
3. Montrer que A est le projeté orthogonal de K sur le plan $(ABCD)$ et calculer la hauteur de la pyramide $KABCD$.
4. Calculer le volume de la pyramide $KABCD$.

Exercice 21 – Paramètre – plans perpendiculaires

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $\mathcal{P}_m : mx + y + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : x - 2y + z + 4 = 0$.

1. Donner des normales $\vec{n}_m$ et $\vec{n}_Q$, puis exprimer leur produit scalaire en fonction de m .
2. Déterminer la valeur de m pour laquelle les deux plans sont perpendiculaires.
3. Pour cette valeur, écrire l'équation de $\mathcal{P}_0$ et vérifier que $A(2; 1; 0)$ appartient à $\mathcal{P}_0$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{Q}$ et calculer $d(A, \mathcal{Q})$.

Exercice 22 – Paramètre – droite parallèle à un plan et distance constante

Pour $m \in \mathbb{R}$, la droite (d_m) passe par $A(1;0;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_m = (1;m;2)$. On considère $\mathcal{P} : 2x - y + z - 1 = 0$.

1. Déterminer m pour que la direction de (d_m) soit parallèle à $\mathcal{P}$.
2. Pour cette valeur, montrer que la droite est strictement parallèle au plan.
3. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.
4. Calculer la distance de (d_m) au plan et expliquer pourquoi elle est constante pour tous les points de la droite.

Exercice 23 – Paramètre – distance imposée entre deux plans

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $\mathcal{P}_m : 2x - y + 2z + m = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x - y + 2z - 3 = 0$.

1. Montrer que les plans sont parallèles pour toute valeur de m , et préciser pour quelle valeur ils sont confondus.
2. Choisir $A(0; -3; 0) \in \mathcal{Q}$ et déterminer son projeté H_m sur $\mathcal{P}_m$.
3. Exprimer la distance entre $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}$ en fonction de m , en utilisant AH_m .
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette distance vaut 2.

Exercice 24 – Plan médiateur, intersection de plans et point le plus proche

On considère $A(0;0;0)$, $B(4;2;0)$ et le plan $\mathcal{Q} : z - x + y = 0$.

1. Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{M}$ de $[AB]$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(d) = \mathcal{M} \cap \mathcal{Q}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal H de l'origine O sur (d) .
4. Calculer la distance de O à (d) .

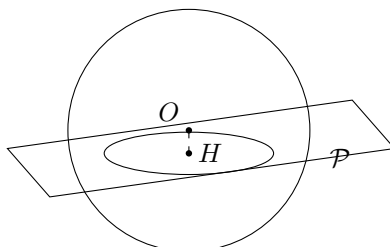
Exercice 25 – Approfondissement – sphère circonscrite à un tétraèdre

On considère le tétraèdre $ABCD$ avec $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ et $D(0;0;2)$.

1. Déterminer les plans médiateurs de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.
2. En déduire le centre O de la sphère passant par A, B, C, D .
3. Calculer le rayon et donner une équation de la sphère circonscrite.
4. Déterminer une équation du plan tangent à cette sphère au point B .

Exercice 26 – Approfondissement – position d'un plan par rapport à une sphère

On considère la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et, pour $m \in \mathbb{R}$, le plan $\mathcal{P}_m : x + 2y + 2z = m$.



1. Déterminer le projeté orthogonal H_m de l'origine O sur $\mathcal{P}_m$.
2. Exprimer OH_m en fonction de m .
3. Discuter, selon m , la nature de l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$.
4. Pour $m = 6$, calculer le rayon du cercle d'intersection.

Exercice 27 – Droite parallèle à un plan – preuve de distance constante

On considère $\mathcal{P} : 3x - y + 2z - 4 = 0$ et la droite (d) passant par $A(1; 1; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

1. Montrer que (d) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.
3. Calculer $d(A, \mathcal{P})$.
4. Pour un point quelconque $M = A + s\vec{u}$ de (d) , montrer que sa distance au plan est la même et donner son projeté en fonction de s .

Exercice 28 – Distance minimale d'un point à une droite – preuve par projection

La droite (d) est donnée par $(x; y; z) = (1; -1; 0) + t(2; 1; 2)$, $t \in \mathbb{R}$. On considère $M(4; 2; 1)$.

1. Écrire les coordonnées d'un point $H_t \in (d)$.
2. Déterminer t_0 pour que $\overrightarrow{MH_{t_0}}$ soit orthogonal au vecteur directeur de (d) .
3. Donner le projeté H et calculer MH .
4. Montrer que pour tout $X \in (d)$, $MX \geq MH$, avec égalité uniquement pour $X = H$.

Exercice 29 – Plan contenant une droite et perpendiculaire à un plan donné

On considère le plan $\mathcal{Q} : x + y + z = 0$, le point $A(1; 0; 0)$ et la droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u} = (1; -1; 0)$. On cherche un plan $\mathcal{P}$ contenant (d) et perpendiculaire à $\mathcal{Q}$.

1. Traduire les conditions imposées à un vecteur normal $\vec{n}_P = (a; b; c)$ de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une normale simple $\vec{n}_P$, puis une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal H de l'origine O sur $\mathcal{P}$.
4. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$.

Exercice 30 – Synthèse très avancée – distance à l'intersection de deux plans

On considère les plans $\mathcal{P} : x + y + z = 1$ et $\mathcal{Q} : x - y = 0$, leur droite d'intersection (d) , et le point $M(2; -1; 3)$.

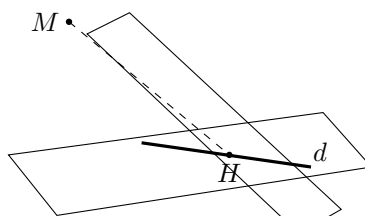


Schéma non à l'échelle.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (d) et un vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Écrire un point $H_t \in (d)$ et déterminer t pour que $\overrightarrow{MH_t} \perp \vec{u}$.
3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (d) et calculer MH .
4. Démontrer que H est l'unique point de (d) le plus proche de M .