

Terminale Spécialité Maths - Loi des grands nombres

Exercice 1 - Somme et moyenne d'un échantillon

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 8$ et $V(X) = 9$. On considère un échantillon indépendant $(X_1, \dots, X_n)$, puis $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
3. Pour $n = 225$, donner l'écart-type de M_n .
4. Pour $n = 225$, majorer $P(|M_n - 8| \geq 0,4)$.

Exercice 2 - Fréquence d'un succès de Bernoulli

Une pièce est conforme avec probabilité $p = 0,92$. On contrôle 200 pièces indépendantes. On note $X_i = 1$ si la pièce i est conforme, 0 sinon, et $F_{200} = \frac{X_1 + \dots + X_{200}}{200}$.

1. Donner $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. Calculer $E(F_{200})$ et $V(F_{200})$.
3. Majorer $P(|F_{200} - 0,92| \geq 0,04)$.
4. En déduire une minoration de $P(0,88 < F_{200} < 0,96)$.

Exercice 3 - Bienaymé-Tchebychev — borne centrale

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 40$ et $V(X) = 25$.

1. Majorer $P(|X - 40| \geq 10)$.
2. En déduire une minoration de $P(30 < X < 50)$.
3. Que donne l'inégalité pour $P(|X - 40| \geq 5)$?
4. Expliquer pourquoi une borne égale à 1 est correcte mais peu informative.

Exercice 4 - Concentration d'une moyenne

La masse d'un produit est modélisée par une variable aléatoire X telle que $E(X) = 250$ et $V(X) = 16$. On prélève 64 produits indépendants et on note M_{64} leur masse moyenne.

1. Calculer $E(M_{64})$ et $V(M_{64})$.
2. Majorer $P(|M_{64} - 250| \geq 1)$.
3. Minorer $P(|M_{64} - 250| < 1)$.
4. Comparer avec la borne obtenue pour une précision 0,5.

Exercice 5 - Première recherche de taille minimale

Une variable aléatoire a pour variance $V = 4$. On veut choisir n afin que la moyenne M_n vérifie une précision $\delta = 0,5$ avec un risque garanti au plus 0,01.

1. Écrire l'inégalité de concentration adaptée.
2. Traduire la condition demandée en une inégalité sur n .
3. Déterminer la plus petite taille entière suffisante.
4. Recommencer si la précision devient $\delta = 1$, avec le même risque.

Exercice 6 - Comparer deux tailles d'échantillon

Une loi a pour variance $V = 36$. On compare les moyennes M_{100} et M_{400} .

1. Calculer les variances et écarts-types de M_{100} et M_{400} .
2. Pour $\delta = 1,5$, calculer les deux bornes de concentration.
3. Par quel facteur la variance et la borne ont-elles été divisées lorsque la taille a été multipliée par 4 ?

4. Par quel facteur l'écart-type a-t-il été divisé ?

Exercice 7 - Précision, risque et taille minimale

Une variable aléatoire a pour variance $V = 12$. On souhaite une précision $\delta = 0,8$ avec un risque garanti au plus 0,03.

1. Écrire la condition suffisante sur n .
2. Déterminer la plus petite taille entière suffisante.
3. Vérifier la borne obtenue pour cette taille.
4. Quelle taille devient suffisante si la précision est divisée par 2 ?

Exercice 8 - Bernoulli de paramètre inconnu — borne uniforme

On observe une fréquence F_n issue d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre inconnu $p \in [0; 1]$.

1. Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0; 1]$.
2. En déduire $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
3. Pour $\delta = 0,03$ et un risque 0,05, déterminer une taille entière suffisante valable pour tout p .
4. Si l'on sait finalement que $p = 0,2$, déterminer une taille suffisante avec les mêmes δ et risque.

Exercice 9 - Comparer borne théorique et probabilité binomiale exacte

On répète 100 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$. On note S_{100} le nombre de succès et $F_{100} = \frac{S_{100}}{100}$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de S_{100} .
2. Majorer $P(|F_{100} - 0,4| \geq 0,1)$ par concentration.
3. Écrire cette probabilité exacte sous forme de deux sommes binomiales.
4. Un calcul numérique donne environ 0,0519. Comparer cette valeur à la borne et commenter.

Exercice 10 - Simulation de moyennes — lecture de résultats

Une loi a pour espérance $\mu = 20$ et écart-type $\sigma = 6$. Des simulations donnent, pour les moyennes d'échantillons, les écarts-types empiriques suivants : 1,21 pour $n = 25$, 0,59 pour $n = 100$, 0,31 pour $n = 400$.

1. Calculer les écarts-types théoriques $\sigma(M_n)$ pour $n = 25, 100, 400$.
2. Comparer ces valeurs aux trois valeurs empiriques.
3. Expliquer pourquoi les écarts-types empiriques ne sont pas exactement égaux aux valeurs théoriques.
4. Prévoir l'effet d'une multiplication de n par 9 sur l'écart-type de la moyenne.

Exercice 11 - Écart-type cible puis risque de concentration

Une loi a pour variance $V = 20$. On veut d'abord rendre l'écart-type de la moyenne inférieur ou égal à 0,2.

1. Déterminer une taille entière minimale assurant $\sigma(M_n) \leq 0,2$.
2. Pour cette taille, majorer $P(|M_n - \mu| \geq 0,5)$.
3. La borne obtenue est-elle inférieure à 0,05 ?
4. Déterminer la taille minimale suffisante pour garantir directement ce risque 0,05 avec $\delta = 0,5$.

Exercice 12 - Deux contraintes simultanées

Une loi a pour variance $V = 9$. On veut qu'une même taille n garantisse simultanément : $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq 0,05$ et $P(|M_n - \mu| \geq 1) \leq 0,005$.

1. Déterminer la condition sur n issue de la première contrainte.
2. Déterminer celle issue de la seconde contrainte.

3. En déduire la plus petite taille entière suffisante pour les deux contraintes.
4. Expliquer pourquoi il faut retenir la plus grande des deux tailles.

Exercice 13 - Contrôle qualité — fréquence de conformité

Une chaîne produit une pièce conforme avec probabilité $p = 0,96$. On prélève $n = 1000$ pièces indépendantes et on note F_n la fréquence de pièces conformes.

1. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
2. Majorer $P(|F_n - 0,96| \geq 0,02)$.
3. Minorer $P(0,94 < F_n < 0,98)$.
4. Interpréter concrètement la minoration obtenue.

Exercice 14 - Sondage — garantie uniforme sans connaître p

On réalise un sondage modélisé par des réponses de Bernoulli indépendantes de paramètre inconnu p . On veut garantir une précision 0,025 avec un risque au plus 0,04, quelle que soit la valeur de p .

1. Justifier que $V(F_n) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Écrire une majoration uniforme de $P(|F_n - p| \geq 0,025)$.
3. Déterminer une taille entière minimale suffisante.
4. Expliquer pourquoi cette taille est une condition suffisante et non nécessaire.

Exercice 15 - Laboratoire — précision d'une moyenne

Une mesure expérimentale X a pour espérance 50 et variance 9. On effectue n mesures indépendantes et on note M_n leur moyenne.

1. Déterminer une taille minimale suffisante pour garantir $P(|M_n - 50| \geq 0,3) \leq 0,05$.
2. Pour $n = 2500$, calculer la borne correspondante.
3. En déduire une minoration de $P(49,7 < M_{2500} < 50,3)$.
4. Comparer la taille 2500 au seuil minimal trouvé à la question 1.

Exercice 16 - Démonstration de la loi des grands nombres

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance finie V . On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1. Montrer que $E(M_n) = \mu$.
2. Montrer que $V(M_n) = \frac{V}{n}$.
3. Pour $\delta > 0$, majorer $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$.
4. Faire tendre n vers $+\infty$ et énoncer la conclusion.

Exercice 17 - Passer de la somme binomiale à la fréquence

Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $F_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Donner $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. Montrer que $|F_n - p| \geq \delta$ équivaut à $|S_n - np| \geq n\delta$.
3. Retrouver la borne $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$ en appliquant Bienaymé-Tchebychev à S_n .
4. Calculer cette borne pour $p = 0,5$, $n = 400$, $\delta = 0,05$.

Exercice 18 - Algorithme de recherche du seuil minimal

Une loi a pour variance $V = 7$. On cherche le plus petit entier n assurant par concentration une précision $\delta = 0,25$ avec un risque au plus 0,02.

1. Écrire l'inégalité que doit vérifier n .
2. Déterminer mathématiquement le seuil minimal.
3. Proposer un algorithme de type boucle 'while' qui retrouve ce seuil.
4. Expliquer pourquoi l'algorithme s'arrête et pourquoi la valeur affichée est minimale.

Exercice 19 - Deux protocoles : taille et précision changent ensemble

Une loi a pour variance $V = 4$. Le protocole A utilise $n_A = 400$ avec une précision $\delta_A = 0,5$. Le protocole B utilise $n_B = 1600$ avec une précision $\delta_B = 0,25$.

1. Calculer la borne de concentration du protocole A.
2. Calculer celle du protocole B.
3. Comparer les écarts-types des deux moyennes.
4. Expliquer pourquoi une taille quatre fois plus grande ne donne ici aucune amélioration de la borne de risque.

Exercice 20 - Retrouver la variance puis dimensionner

Pour un échantillon de taille 50, on sait que la moyenne M_{50} a pour variance 0,06.

1. Retrouver la variance V de la loi échantillonnée.
2. Pour $n = 200$, calculer $V(M_{200})$.
3. Pour $n = 200$ et $\delta = 0,5$, donner la borne de concentration.
4. Déterminer une taille minimale suffisante pour ramener cette borne à 0,02.

Exercice 21 - Synthèse Bac — deux niveaux de tolérance

La longueur d'une pièce est modélisée par une variable X d'espérance 100 et de variance 4. On prélève 400 pièces indépendantes et on note M_{400} leur longueur moyenne.

1. Calculer $E(M_{400})$, $V(M_{400})$ et $\sigma(M_{400})$.
2. Majorer $P(|M_{400} - 100| \geq 0,2)$.
3. Que donne la même méthode pour la tolérance 0,1 ? Interpréter.
4. Déterminer une taille minimale suffisante pour une tolérance 0,2 et un risque au plus 0,05.

Exercice 22 - Formule générale de dimensionnement

On considère une loi de variance $V > 0$. On fixe une précision $\delta > 0$ et un risque maximal $\alpha \in]0; 1[$.

1. Montrer qu'une condition suffisante est $n \geq \frac{V}{\alpha\delta^2}$.
2. Que devient cette taille suffisante si δ est doublée ?
3. Que devient-elle si α est divisé par 2 ?
4. Application : calculer le seuil pour $V = 10$, $\delta = 0,25$, $\alpha = 0,02$.

Exercice 23 - Pire cas Bernoulli et gain d'information

On veut contrôler une fréquence F_n de Bernoulli. On commence sans connaître p , puis on apprend que $p = 0,1$. On fixe $\delta = 0,02$ et un risque 0,05.

1. Démontrer que le pire cas de variance correspond à $p = 1/2$.
2. Déterminer la taille minimale suffisante sans connaître p .
3. Déterminer la taille minimale suffisante lorsque $p = 0,1$ est connu.
4. Quantifier le gain en nombre d'observations et l'expliquer.

Exercice 24 - Algorithme binomial exact contre borne universelle

On reprend $S_{100} \sim \mathcal{B}(100; 0,4)$ et $F_{100} = \frac{S_{100}}{100}$. On s'intéresse à $|F_{100} - 0,4| \geq 0,1$.

1. Retrouver la borne de concentration fournie par Bienaymé-Tchebychev.
2. Écrire précisément l'événement en termes de valeurs entières de S_{100} .
3. Écrire un pseudo-code calculant la probabilité binomiale exacte par sommation.
4. La valeur exacte est environ 0,051882. Calculer le rapport borne/probabilité exacte et commenter.

Exercice 25 - Radioactivité — très grand échantillon

Chaque atome a, sur une durée donnée, une probabilité $p = 0,001$ de se désintégrer. On observe $n = 10^6$ atomes supposés indépendants et on note F_n la fréquence des désintégrations.

1. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
2. Majorer $P(|F_n - 0,001| \geq 0,0001)$.
3. Minorer la probabilité que la fréquence soit dans $]0,0009; 0,0011[$.
4. Traduire cet intervalle en nombre de désintégrations parmi 10^6 atomes.

Exercice 26 - Comparer deux fréquences indépendantes

Une machine A produit une pièce conforme avec probabilité 0,9 et une machine B avec probabilité 0,8. On observe indépendamment 400 pièces de A et 625 pièces de B. Les fréquences sont notées F_A et F_B , et $D = F_A - F_B$.

1. Calculer $E(D)$.
2. En utilisant l'indépendance des deux échantillons, calculer $V(D)$.
3. Majorer $P(|D - 0,1| \geq 0,05)$.
4. En déduire une minoration de $P(D > 0,05)$.

Exercice 27 - Transformation affine et concentration

Une variable X a pour espérance 4 et variance 5. On pose $Y = 3X - 2$. On prélève 500 valeurs indépendantes de Y et on note $\bar{Y}$ leur moyenne.

1. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Calculer $E(\bar{Y})$ et $V(\bar{Y})$.
3. Majorer $P(|\bar{Y} - 10| \geq 1)$.
4. Si $\bar{X}$ désigne la moyenne des valeurs initiales, établir la relation entre $\bar{Y}$ et $\bar{X}$, puis réinterpréter l'événement précédent.

Exercice 28 - Marche aléatoire et ordre de grandeur

On considère des variables indépendantes ε_i prenant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$. On pose $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$.

1. Calculer $E(\varepsilon_i)$, $V(\varepsilon_i)$, puis $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. Majorer $P(|S_n| \geq 3\sqrt{n})$.
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $P(|S_n/n| \geq \delta) \leq \frac{1}{n\delta^2}$.
4. En déduire que S_n/n converge en probabilité vers 0.

Exercice 29 - Simulation : écart-type des moyennes

Une loi a pour écart-type $\sigma = 6$. Un programme simule un grand nombre d'échantillons et obtient pour l'écart-type empirique des moyennes : 1,21 pour $n = 25$, 0,59 pour $n = 100$, 0,31 pour $n = 400$.

1. Donner la formule théorique de $\sigma(M_n)$.
2. Calculer les trois valeurs théoriques et les comparer aux résultats simulés.

3. Calculer les rapports $1,21/1,2$, $0,59/0,6$ et $0,31/0,3$, puis commenter.
4. Proposer un test de simulation permettant de vérifier expérimentalement la dépendance en $1/\sqrt{n}$.

Exercice 30 - Synthèse très avancée — estimation uniforme d'une probabilité

On estime une probabilité inconnue p par la fréquence F_n obtenue sur n épreuves de Bernoulli indépendantes. On souhaite une précision $\delta = 0,02$ et une garantie $P(|F_n - p| < 0,02) \geq 0,99$, uniforme en p .

1. Montrer que $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
2. Traduire la garantie 0,99 en une contrainte sur cette borne.
3. Déterminer une taille entière minimale suffisante avec $\delta = 0,02$.
4. Expliquer précisément ce que garantit le résultat et ce qu'il ne garantit pas.