

Limites de suites - Exercices seuls

Terminale générale - spécialité mathématiques

30 exercices progressifs - programme en vigueur 2026-2027

Exercice 1 - Limites de quotients - terme prépondérant

*

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \frac{4n+7}{5n-3}$.

3. $u_n = \frac{-2n^2+5n+1}{3(n+1)^2}$.

2. $u_n = \frac{n}{6} - 3 + \frac{2n}{n^2+4}$.

4. $u_n = \frac{7-3n}{n^2+2}$.

Exercice 2 - Quotients de polynômes - degrés différents

*

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants en faisant apparaître le terme prépondérant.

1. $u_n = \frac{12n-5}{n^2+3}$.

3. $u_n = \frac{5n^2-9}{2n^2+3n+7}$.

2. $u_n = \frac{3n^2+2}{4n-1}$.

4. $u_n = \frac{2n^3+n}{5n^2-4}$.

Exercice 3 - Expressions mixtes - limites à reconnaître

*

Déterminer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 2 - \frac{n}{5} + \frac{3}{n+1}$.

3. $u_n = \frac{3n+1}{n-1} + \frac{1}{n}$, pour $n \geq 2$.

2. $u_n = \frac{4n^2-1}{n+2} - 4n$.

4. $u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+1}$.

Exercice 4 - Formes indéterminées - rationalisation

**

Déterminer la limite de (u_n) en utilisant, lorsque c'est nécessaire, l'expression conjuguée.

1. $u_n = \sqrt{n^2+4n+7} - n$.

3. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$.

2. $u_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$.

4. $u_n = \sqrt{n^2+n\sqrt{n}} - n$.

Exercice 5 - Théorème des gendarmes et comparaison

**

Déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide d'un encadrement ou d'une comparaison.

1. $u_n = \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

3. $u_n = n + 2 - \sin n$.

2. $u_n = n^2 - 5(-1)^n$.

4. $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} - 3$.

Exercice 6 - Encadrements avec fonctions trigonométriques

**

Pour chacune des suites suivantes, construire un encadrement adapté puis déterminer la limite.

1. $u_n = \frac{2 + \sin n}{n}, n \geq 1.$

2. $u_n = \frac{n + \cos n}{2n - \sin n}, n \geq 1.$

3. $u_n = \frac{n}{n + \cos n}, n \geq 2.$

4. $u_n = \sqrt{n^2 + \sin n} - n, n \geq 1.$

Exercice 7 - Somme de n termes - Python et théorème des gendarmes

**

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 4} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 2n} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 2k}.$$

1. Calculer exactement u_1, u_2 et u_3 .
2. Écrire une fonction Python `u(n)` qui retourne la valeur de u_n pour $n \geq 1$.
3. À l'aide de cette fonction, calculer une valeur approchée de u_{10}, u_{20} et u_{50} , puis conjecturer la limite de (u_n) .
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n^2}{n^2 + 2n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 2},$$

puis démontrer la conjecture.

Exercice 8 - Somme de n termes - majoration globale

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^3 + k}.$$

1. Vérifier que tous les termes de la somme sont positifs.
2. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$,

$$0 \leq \frac{k}{n^3 + k} \leq \frac{k}{n^3}.$$

3. En déduire que

$$0 \leq v_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^3}.$$

4. Déterminer la limite de (v_n) à l'aide du théorème des gendarmes.

Exercice 9 - Suite récurrente affine - point fixe

**

On définit $u_0 = 5$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer le point fixe L de la relation de récurrence.
2. Poser $v_n = u_n - 2$ et montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite et le sens de variation de (u_n) .

Exercice 10 - Modèle d'évolution - seuil

**

Une population est modélisée par $u_0 = 50$ et

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 30.$$

La quantité u_n est mesurée après n périodes.

1. Déterminer la valeur d'équilibre L .
2. Poser $v_n = u_n - 150$, puis exprimer u_n .
3. Déterminer la limite de (u_n) et son sens de variation.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 140$, puis écrire un court programme Python qui retrouve ce seuil.

Exercice 11 - Récurrence avec racine - stabilité et monotonie

On définit $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
2. Montrer que $u_{n+1} \geq u_n$.
3. Justifier la convergence de (u_n) .
4. Déterminer sa limite.

Exercice 12 - Récurrence rationnelle - convergence vers 1

On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$.
2. En déduire que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
3. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Justifier la convergence et déterminer la limite.

Exercice 13 - Récurrence logistique - erreur exacte

On suppose $0 < u_0 < 1$ et on définit

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

1. Montrer que si $0 < u_n < 1$, alors $0 < u_{n+1} < 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Justifier la convergence et déterminer la limite.
4. Montrer que $1 - u_n = (1 - u_0)^{2^n}$.

Exercice 14 - Variable auxiliaire - récurrence inversée

On définit $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n .
2. Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$ et déterminer une relation de récurrence pour (v_n) .
3. Exprimer u_n en fonction de n , puis donner sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 0,01$.

Exercice 15 - Rationalisation avec paramètres

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, on définit

$$u_n = \sqrt{n^2 + an + b} - n.$$

1. Justifier que $n^2 + an + b > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Rationaliser u_n .
3. Mettre u_n sous une forme où la limite est immédiate.
4. Déterminer la limite générale, puis l'appliquer à $a = 4$, $b = -3$.

Exercice 16 - Quotient mixte - exponentielle dominante

On considère, pour n assez grand,

$$u_n = \frac{3^n + n^2}{3^n - 2n}.$$

1. Montrer que $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0$ et $\frac{n^2}{3^n} \rightarrow 0$.
2. Justifier que $3^n - 2n > 0$ à partir d'un certain rang.
3. Déterminer $\lim u_n$.
4. Étudier le signe de $u_n - 1$ à partir d'un certain rang.

Exercice 17 - Encadrement quantitatif - quotient trigonométrique

Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{2n + \sin n}{n + \cos n}.$$

1. Justifier que le dénominateur est strictement positif.
2. Exprimer $u_n - 2$.
3. Montrer que $|u_n - 2| \leq \frac{3}{n-1}$.

4. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 18 - Suite croissante non majorée - raisonnement par contradiction

On définit $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
3. Supposer (u_n) majorée et obtenir une contradiction.
4. Conclure sur la limite de (u_n) .

Exercice 19 - Récurrence dépendant de n - produit télescopique

On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n + 2}{n+2}.$$

1. Poser $v_n = 2 - u_n$ et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Calculer v_n explicitement.
3. En déduire une expression explicite de u_n .
4. Déterminer la monotonie et la limite de (u_n) .

Exercice 20 - Récurrence affine avec paramètre - classification complète

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = au_n + 1.$$

1. Pour $a \neq 1$, montrer que $u_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}$.
2. Traiter le cas $|a| < 1$.
3. Traiter les cas $a = 1$ et $a > 1$.
4. Traiter les cas $a = -1$ et $a < -1$, puis donner la condition exacte de convergence.

Exercice 21 - Point fixe irrationnel - deux régimes monotones

Soit $u_0 \in [0; 2]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 3}.$$

On pose $\alpha = \sqrt{3} - 1$.

1. Montrer que $[0; 2]$ est stable.

2. Vérifier que α est l'unique point fixe de f dans $[0; 2]$.
3. Montrer que si $u_0 \leq \alpha$, alors (u_n) est croissante et majorée par α , tandis que si $u_0 \geq \alpha$, elle est décroissante et minorée par α .
4. Conclure sur la limite pour tout $u_0 \in [0; 2]$.

Exercice 22 - Récurrence rationnelle - invariance de part et d'autre de 1

Soit $u_0 \in [0; 2]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $[0; 2]$ est stable.
2. Calculer $f(x) - x$ et $f(x) - 1$.
3. Étudier la suite selon que $u_0 \leq 1$ ou $u_0 \geq 1$.
4. Déterminer la limite pour tout $u_0 \in [0; 2]$.

Exercice 23 - Modèle affine avancé - seuil logarithmique

On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 8.$$

1. Déterminer le point fixe et exprimer u_n en fonction de n .
2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Transformer la condition $u_n > 19,5$ en une inégalité sur $(3/5)^n$.
4. Déterminer le premier rang où $u_n > 19,5$.

Exercice 24 - Asymptotique exponentielle - précision sur l'erreur

Pour n assez grand, on pose

$$u_n = \frac{e^n - n^4}{e^n + n^4}.$$

1. Montrer que $\frac{n^4}{e^n} \rightarrow 0$.
2. Déterminer $\lim u_n$.
3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $0 < u_n < 1$.
4. Calculer $\lim \frac{e^n}{n^4}(1 - u_n)$.

Exercice 25 - Récurrence non linéaire - comparaison géométrique et seuil

On choisit $u_0 \in [0; 1]$ et on définit

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{3}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Établir que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.
3. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq u_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis déterminer la limite de (u_n) .
4. Pour $u_0 = 1$, déterminer le plus petit entier N tel que la majoration obtenue garantisse $u_n < 10^{-2}$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 26 - Récurrence quadratique - convergence monotone

Soit $u_0 \in [1; 2]$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1. Montrer que $[1; 2]$ est stable.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en étudier le signe.
3. Justifier la convergence de (u_n) .
4. Déterminer la limite.

Exercice 27 - Rationalisation à échelle $\sqrt{n}$

Pour $n \geq 1$, on définit

$$u_n = \sqrt{n^2 + n\sqrt{n}} - n.$$

1. Rationaliser u_n .
2. Montrer que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1}$.
3. Déterminer la limite de (u_n) .
4. Déterminer $\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 28 - Rationalisation avec oscillation amortie

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sqrt{n^2 + 3n + (-1)^n} - n.$$

1. Justifier que l'expression sous la racine est positive.
2. Rationaliser u_n .
3. Mettre u_n sous une forme où tous les termes oscillants sont amortis.
4. Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 29 - Récurrence exponentielle - divergence non évidente

On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ et que (u_n) est strictement croissante.
2. Supposer que (u_n) est majorée. Quelle conséquence en tirer ?
3. Montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.
4. Conclure sur u_n , puis donner $\lim e^{-u_n}$.

Exercice 30 - Erreur géométriquement contrôlée autour d'un point fixe

On définit $u_0 = 3$ et

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. Justifier la convergence et déterminer la limite.
4. Montrer que $0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$, puis en déduire $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.