

Terminale Spécialité - Limites de fonctions

Consigne : rédiger chaque limite, justifier les transformations et conclure sur les asymptotes lorsqu'elles existent. Aucun développement limité.

Exercice 1 - Terme dominant — quotient de deux polynômes

Facile

1. Soit $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x - 4}$. Identifier la forme obtenue lorsque $x \rightarrow +\infty$.
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur par x^2 , puis réécrire $f(x)$ sous une forme adaptée au passage à la limite.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. En déduire l'équation de l'asymptote horizontale éventuelle de la courbe de f .

Exercice 2 - Limites latérales et asymptote verticale

Facile

1. On considère $g(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$. Déterminer son domaine de définition.
2. Étudier le signe du numérateur et du dénominateur lorsque x est proche de 1.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.
4. Déterminer les asymptotes verticale et horizontale de la courbe de g .

Exercice 3 - Rationalisation d'une forme $\infty - \infty$

Facile

1. Soit $h(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$. Préciser le domaine de définition de h .
2. Identifier la forme obtenue lorsque $x \rightarrow +\infty$, puis rationaliser $h(x)$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et préciser les conséquences asymptotiques.

Exercice 4 - Croissance comparée — polynôme et exponentielle

Facile

1. On pose $p(x) = \frac{x^3}{e^x}$. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$ à l'aide de la croissance comparée.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$ en justifiant le signe.
4. En déduire la limite en $+\infty$ de $q(x) = x^3 e^{-x}$ et une asymptote éventuelle.

Exercice 5 - Composition de limites avec l'exponentielle

Facile

1. Soit $f(x) = \sqrt{2 + e^{-x}}$. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de e^{-x} lorsque $x \rightarrow +\infty$, puis celle de $f(x)$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Interpréter graphiquement la limite obtenue en $+\infty$.

Exercice 6 - Deux asymptotes et position relative**Moyen**

1. On considère $f(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$. Déterminer D_f .
 2. Calculer les limites de f lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.
 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow (\frac{-3}{2})^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{-3}{2})^+} f(x)$.
 4. Déterminer les asymptotes et préciser, pour $|x|$ grand, de quel côté de l'asymptote horizontale se trouve la courbe.
-

Exercice 7 - Degrés différents — comportement aux deux infinis**Moyen**

1. Soit $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{x^2 + 1}$. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.
 2. Mettre $f(x)$ sous la forme $x \times R(x)$, où $R(x)$ admet une limite finie non nulle à l'infini.
 3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 4. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et expliquer ce que cette information dit sur la direction de la branche infinie, sans invoquer d'asymptote oblique.
-

Exercice 8 - Forme 0/0 et rationalisation en un réel**Moyen**

1. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$. Déterminer son domaine de définition.
 2. Identifier la forme lorsque $x \rightarrow 1$, puis rationaliser le numérateur.
 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
 4. La droite $x = 1$ est-elle une asymptote verticale? Justifier uniquement à partir de la limite.
-

Exercice 9 - Théorème des gendarmes avec une fonction oscillante**Moyen**

1. On considère $f(x) = \frac{3 + \sin x}{x}$ pour $x \neq 0$. Encadrer $3 + \sin x$.
 2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ par encadrement.
 3. Adapter l'encadrement pour déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 4. Interpréter les deux limites en termes d'asymptote.
-

Exercice 10 - Composition exponentielle et limites latérales**Moyen**

1. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$, puis en déduire les limites de f .
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Donner toutes les asymptotes parallèles aux axes.

Exercice 11 - Étude complète d'une fonction rationnelle à deux pôles**Difficile**

1. On considère $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}$. Déterminer son domaine de définition.
 2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 3. Calculer les limites latérales de f en $x = 1$.
 4. Calculer les limites latérales en $x = -1$ puis dresser la liste complète des asymptotes parallèles aux axes.
-

Exercice 12 - Racine et changement de signe de x**Difficile**

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$. Montrer que son domaine est $\mathbb{R}$.
 2. Rationaliser l'expression et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 3. Réécrire $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ de façon adaptée lorsque $x < 0$, puis calculer la limite en $-\infty$.
 4. Dédire les asymptotes horizontales éventuelles et expliquer pourquoi le traitement de $+\infty$ et $-\infty$ ne peut pas être identique.
-

Exercice 13 - Domaine non connexe et racine d'un quotient**Difficile**

1. On considère $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$. Déterminer précisément son domaine de définition.
 2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et expliquer pourquoi une limite à gauche de 1 n'est pas pertinente dans le domaine.
 4. Calculer $\lim_{x \rightarrow (\frac{-1}{2})^-} f(x)$, puis donner les asymptotes parallèles aux axes.
-

Exercice 14 - Différence de deux racines aux deux infinis**Difficile**

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
 2. Rationaliser $f(x)$ en une seule fraction.
 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire les asymptotes horizontales.
-

Exercice 15 - Valeur absolue et gendarmes**Difficile**

1. On pose $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Établir un encadrement de $|f(x)|$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. Généraliser : pour $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $g(x) = \frac{a + b \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ aux deux infinis.

Exercice 16 - Exponentielle d'une fonction rationnelle**Difficile**

1. Soit $f(x) = e^{\frac{2x+1}{x-3}}$. Déterminer son domaine.
2. Montrer que $\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$, puis déterminer les limites de l'exposant en $\pm\infty$.
3. Calculer les limites de f lorsque $x \rightarrow 3^-$ et $x \rightarrow 3^+$.
4. Déterminer toutes les asymptotes parallèles aux axes.

Exercice 17 - Paramètre et asymptote horizontale imposée**Difficile**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a(x) = \frac{ax^2 + 3x - 1}{x^2 + 4}$. Justifier que f_a est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a , les limites de f_a en $\pm\infty$.
3. Déterminer la valeur de a pour laquelle la courbe admet $y = 2$ comme asymptote horizontale.
4. Pour cette valeur de a , étudier le signe de $f_a(x) - 2$ lorsque $|x|$ est grand et interpréter graphiquement.

Exercice 18 - Valeur absolue — comportements différents à gauche et à droite**Difficile**

1. On considère $f(x) = \frac{|x| - x}{x + 1}$. Déterminer le domaine puis donner une expression de f pour $x \geq 0$ et pour $x < 0$.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer les limites latérales en $x = -1$ en justifiant les signes.
4. Donner toutes les asymptotes parallèles aux axes.

Exercice 19 - Exponentielle sur polynôme — comparaison et pôle**Difficile**

1. Soit $f(x) = \frac{e^x}{x^3 + 1}$. Déterminer le domaine et factoriser le dénominateur au voisinage de son zéro réel.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et préciser le signe de la fonction pour $x < -1$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en utilisant la croissance comparée.
4. Calculer les limites latérales en $x = -1$ et en déduire toutes les asymptotes parallèles aux axes.

Exercice 20 - Asymptotes obliques — approfondissement officiel**Difficile ·
Approfondissement**

1. On considère $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \rightarrow +\infty$, étudier $f(x) - (x + 2)$ par rationalisation.
3. Pour $x \rightarrow -\infty$, étudier $f(x) - (-x - 2)$.
4. En déduire les asymptotes obliques et préciser le statut de cette question dans le programme officiel.

Exercice 21 - Fausse asymptote après simplification — synthèse Bac

Très difficile · Bac

1. On considère $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$. Déterminer son domaine et factoriser numérateur et dénominateur.
2. Pour $x \neq \pm 2$, simplifier $f(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
3. Calculer les limites latérales de f en $x = -2$.
4. Déterminer les limites en $\pm\infty$, puis dresser la liste exacte des asymptotes en expliquant pourquoi $x = 2$ n'en est pas une.

Exercice 22 - Quotient de conjugués — comportement fortement dissymétrique

Très difficile · Bac

1. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. Montrer que le dénominateur est strictement positif pour tout réel x .
2. Transformer $f(x)$ en une expression particulièrement simple pour étudier $+\infty$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et donner les asymptotes horizontales éventuelles.

Exercice 23 - Synthèse Terminale — logarithme et limitesTrès difficile ·
Synthèse

1. On considère $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ à l'aide de la croissance comparée du logarithme et de x .
4. Donner les asymptotes de la courbe et rappeler la différence avec la limite classique de $x \ln x$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 24 - Quotient exponentiel — trois asymptotes

Très difficile · Bac

1. Soit $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$. Déterminer son domaine de définition.
2. Étudier le signe de $e^x - 1$ de part et d'autre de 0 puis calculer les limites latérales de f en 0.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en divisant numérateur et dénominateur par e^x .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et dresser la liste complète des asymptotes.

Exercice 25 - Racine, valeur absolue implicite et deux asymptotes horizontales

Très difficile · Bac

1. On considère $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $|f(x)| < 1$ pour tout réel x .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en factorisant correctement la racine.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Déterminer les asymptotes horizontales et interpréter l'inégalité de la question 1 par rapport à ces droites.

Exercice 26 - Racine moins valeur absolue — deux limites finies différentes

Très difficile · Bac

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - |x|$. Montrer que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x > 0$, rationaliser $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ puis calculer la limite en $+\infty$.
3. Pour $x < 0$, écrire $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$, rationaliser puis calculer la limite en $-\infty$.
4. En déduire les deux asymptotes horizontales et expliquer la dissymétrie.

Exercice 27 - Paramètre, deux asymptotes verticales et une horizontale

Très difficile · Bac

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a(x) = \frac{ax^2 + x + 3}{x^2 - 4}$. Déterminer le domaine commun à toutes les fonctions f_a .
2. Déterminer les limites de f_a en $\pm\infty$, puis trouver a pour que l'asymptote horizontale soit $y = 2$.
3. Pour cette valeur $a = 2$, calculer les limites latérales en $x = 2$.
4. Toujours pour $a = 2$, calculer les limites latérales en $x = -2$ et donner toutes les asymptotes.

Exercice 28 - Gendarmes et croissance comparée dans un produit oscillant

Très difficile · Bac

1. On considère $f(x) = e^{-x}(2 + \sin x)$. Établir un encadrement de $f(x)$ valable pour tout réel x .
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ en combinant encadrement et croissance comparée.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis donner les asymptotes horizontales.

Exercice 29 - Bornes du domaine, pôle et infini dans un même exercice

Très difficile · Bac

1. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. Déterminer précisément le domaine de définition.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et interpréter le comportement à la borne du domaine.
3. Calculer les limites latérales de f en $x = 1$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner toutes les asymptotes parallèles aux axes.

Exercice 30 - Synthèse finale — exponentielle, comparaison et asymptotes

Très difficile · Bac

1. On considère $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer les limites latérales de f en $x = 0$ en justifiant le signe du dénominateur.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en faisant apparaître $\frac{x}{e^x}$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis donner toutes les asymptotes parallèles aux axes et résumer les méthodes utilisées.