

Terminale Spécialité - Fonctions trigonométriques

Exercices seuls - version élève imprimable

30 exercices - 5 facile - 5 moyen - 10 difficile - 10 très difficile
4 sous-questions par exercice - 120 sous-questions au total

Consigne : rédiger soigneusement toutes les justifications.

Exercice 1 - Parité, périodicité et valeur exacte

Niveau : Facile On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2 \cos x - \sin x.$$

1. Rappeler la parité de $\sin$ et de $\cos$, puis exprimer $f(-x)$.
2. Montrer que 2π est une période de f .
3. Calculer exactement $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
4. Simplifier $f(x) + f(-x)$, puis résoudre $f(x) + f(-x) = 2$ sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice 2 - Équation et inéquation en cosinus

Niveau : Facile On travaille sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et on considère $c(x) = \cos x$.

1. Calculer $c'(x)$.
2. Dresser les variations de c sur $[-\pi; \pi]$.
3. Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$.
4. En déduire les solutions de $\cos x \leq \frac{1}{2}$ sur ce même intervalle.

Exercice 3 - Cosinus : dérivée, variations et seuil

Niveau : Facile On considère $f(x) = \cos x$ sur $[0; \pi]$.

1. Donner le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
2. En déduire le tableau de variations de f .
3. Résoudre $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Résoudre $f(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 - Sinus sur son intervalle de croissance

Niveau : Facile On considère $s(x) = \sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Calculer $s'(x)$ et donner son signe.
2. Justifier que s est croissante sur l'intervalle.
3. Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ sur cet intervalle.
4. Résoudre $\sin x \geq \frac{1}{2}$ sur cet intervalle.

Exercice 5 - Fonction composée $x \mapsto \sin(2x)$

Niveau : Facile On considère $f(x) = \sin(2x)$ sur $[0; \pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les zéros de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
3. Dresser les variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 6 - Fonction $x + \cos x$: monotonie malgré un zéro de la dérivée

Niveau : Moyen On définit sur $[0; \pi]$

$$f(x) = x + \cos x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$ et déterminer quand $f'(x) = 0$.
3. Justifier que f est strictement croissante sur $[0; \pi]$.
4. Résoudre exactement $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 - Une équation trigonométrique avec terme affine

Niveau : Moyen On considère sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$g(x) = \cos x - \frac{x}{2}.$$

1. Calculer $g'(x)$ et déterminer son signe.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
3. Montrer que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.
4. Donner le signe de $g(x)$ en fonction de α .

Exercice 8 - Maximum de $\sin x + \cos x$ sans formule d'amplitude

Niveau : Moyen On considère sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$h(x) = \sin x + \cos x.$$

1. Calculer $h'(x)$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ et dresser les variations de h .
3. Déterminer la valeur maximale de h .
4. Résoudre $h(x) = 1$ sur l'intervalle.

Exercice 9 - Quotient trigonométrique et maximum exact

Niveau : Moyen On définit sur $[0; \pi]$

$$q(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. Justifier que q est bien définie sur $[0; \pi]$.
2. Calculer $q'(x)$ et simplifier son numérateur.
3. Dresser les variations de q .
4. Déterminer le maximum de q et le point où il est atteint.

Exercice 10 - Période réduite et variations de $\cos(2x)$

Niveau : Moyen On considère sur $[0; \pi]$

$$g(x) = \cos(2x) + \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que π est une période de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la même expression.
2. Calculer $g'(x)$.
3. Dresser les variations de g sur $[0; \pi]$ et donner ses extrema.
4. Résoudre $g(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 11 - Produit exponentielle-cosinus : étude complète

Niveau : Difficile On considère $f(x) = e^x \cos x$ sur $[0; \pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; \pi]$ et étudier le signe de f' .
3. Dresser les variations de f et déterminer son maximum.
4. Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 12 - Une dérivée qui se simplifie fortement

Niveau : Difficile On définit sur $[0; \pi]$

$$F(x) = e^x(\sin x - \cos x).$$

1. Calculer et simplifier $F'(x)$.
2. En déduire les variations de F sur $[0; \pi]$.
3. Résoudre $F(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.
4. Résoudre $F(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 13 - Exponentielle décroissante et oscillation trigonométrique

Niveau : Difficile On considère sur $[0; 2\pi]$

$$G(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x).$$

1. Calculer et simplifier $G'(x)$.
2. Dresser les variations de G sur $[0; 2\pi]$.
3. Déterminer les zéros de G sur l'intervalle.
4. Donner le signe de G sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 14 - Famille $\cos x + ax$: influence du paramètre

Niveau : Difficile Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit sur $[0; \pi]$

$$f_a(x) = \cos x + ax.$$

1. Calculer $f'_a(x)$.
2. Montrer que si $a \leq 0$, alors f_a est décroissante sur $[0; \pi]$.
3. Montrer que si $a \geq 1$, alors f_a est croissante sur $[0; \pi]$.
4. Étudier précisément les variations de $f_{1/2}$.

Exercice 15 - Équation $\sin x = \frac{x}{2}$: existence et unicité

Niveau : Difficile On pose sur $[0; \pi]$

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{x}{2}.$$

1. Calculer $\varphi'(x)$ et étudier ses variations.
2. Montrer que 0 est une solution de $\varphi(x) = 0$.
3. Montrer qu'il existe une unique autre solution $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}; \pi \right[$.
4. En déduire le signe de φ sur $[0; \pi]$.

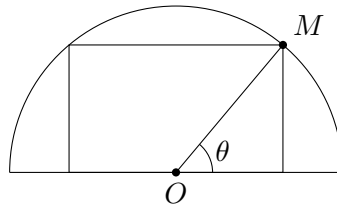
Exercice 16 - Démonstration classique : $|\sin x| \leq |x|$

Niveau : Difficile On souhaite établir une inégalité valable pour tout réel x .

1. Pour $x \in [0; \pi]$, poser $h(x) = x - \sin x$ et étudier h .
2. En déduire $\sin x \leq x$ pour $x \in [0; \pi]$.
3. Montrer alors que $|\sin x| \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
4. À l'aide de l'impairité du sinus, montrer que pour tout réel x , $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice 17 - Rectangle inscrit dans un demi-cercle

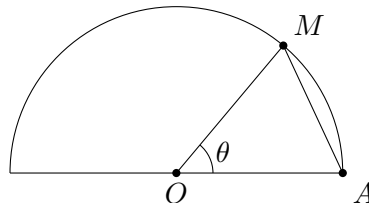
Niveau : Difficile Dans un demi-cercle de centre O et de rayon 1, on inscrit un rectangle symétrique par rapport à l'axe vertical. Le sommet supérieur droit est $M(\cos \theta; \sin \theta)$, avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer la largeur et la hauteur du rectangle en fonction de θ .
2. Montrer que son aire est $A(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$.
3. Calculer $A'(\theta)$ sans utiliser de formule d'angle double, puis étudier son signe.
4. Déterminer l'aire maximale et la valeur de θ correspondante.

Exercice 18 - Longueur d'une corde et fonction cosinus

Niveau : Difficile Dans le cercle trigonométrique, $A = (1; 0)$ et $M = (\cos \theta; \sin \theta)$, avec $\theta \in [0; \pi]$. On note $d(\theta) = AM$.



1. Montrer que $d(\theta)^2 = 2 - 2 \cos \theta$.
2. Étudier les variations de la fonction $D(\theta) = d(\theta)^2$.
3. En déduire les valeurs minimale et maximale de AM .
4. Déterminer θ lorsque $AM = 1$.

Exercice 19 - Maximum de $x \cos x$ et racine non explicite

Niveau : Difficile On considère sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = x \cos x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Poser $u(x) = \cos x - x \sin x$. Montrer que u est strictement décroissante.
3. Montrer que u admet une unique racine α et que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.
4. En déduire que f admet un unique maximum sur l'intervalle et préciser où il est atteint.

Exercice 20 - Une optimisation avec $\cos x + \sin^2 x$

Niveau : Difficile On définit sur $[0; \pi]$

$$f(x) = \cos x + \sin^2 x.$$

1. Calculer $f'(x)$ et la factoriser.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; \pi]$.
3. Dresser les variations de f et déterminer son maximum.
4. Résoudre $f(x) = 1$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 21 - Fonction composée $\cos(\cos x)$

Niveau : Très difficile / type Bac On considère sur $[0; \pi]$

$$f(x) = \cos(\cos x).$$

1. Montrer que $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout $x \in [0; \pi]$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et dresser les variations de f .
4. Résoudre $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 22 - Bijection de $x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$

Niveau : Très difficile / type Bac On définit sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = x + \sin x.$$

1. Calculer $F'(x)$ et montrer que $F'(x) \geq 0$ pour tout réel x .
2. Justifier que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$, puis montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre $x + \sin x = \pi$.

Exercice 23 - Trois solutions pour $x + 2 \sin x = \pi$

Niveau : Très difficile / type Bac On considère sur $[0; 2\pi]$

$$F(x) = x + 2 \sin x.$$

1. Calculer $F'(x)$ et déterminer ses zéros.
2. Dresser le tableau de variations de F .
3. Montrer que l'équation $F(x) = \pi$ possède exactement trois solutions sur $[0; 2\pi]$.
4. Montrer que ces solutions peuvent s'écrire α , π et $2\pi - \alpha$, avec $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 24 - Étude de $e^{\sin x}$ sur une période

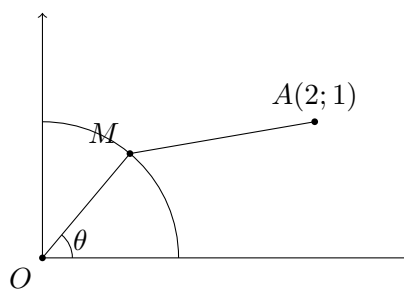
Niveau : Très difficile / type Bac On considère sur $[0; 2\pi]$

$$f(x) = e^{\sin x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser les variations de f sur $[0; 2\pi]$.
3. Déterminer le minimum et le maximum de f .
4. Résoudre $f(x) = e^{1/2}$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 25 - Distance minimale entre un point et le quart de cercle

Niveau : Très difficile / type Bac Dans un repère orthonormé, $M(\cos \theta; \sin \theta)$ décrit le quart de cercle unité pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On fixe $A(2; 1)$.



1. Montrer que $AM^2 = 6 - 4 \cos \theta - 2 \sin \theta$.
2. On pose $D(\theta) = AM^2$. Calculer $D'(\theta)$.
3. Montrer qu'il existe un unique point critique θ_0 et déterminer exactement $\sin \theta_0$ et $\cos \theta_0$.
4. Déterminer la distance minimale AM .

Exercice 26 - Modélisation périodique sur 24 heures

Niveau : Très difficile / type Bac Une température idéale est modélisée, pour $t \in [0; 24]$ (en heures), par

$$T(t) = 12 + 8 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right).$$

1. Montrer que le modèle prolongé à $\mathbb{R}$ est de période 24.
2. Calculer $T'(t)$ et étudier les variations de T sur $[0; 24]$.
3. Déterminer les températures maximale et minimale et les instants correspondants.
4. Résoudre $T(t) \leq 12$ sur $[0; 24]$.

Exercice 27 - Paramètre m dans $\cos x = m$

Niveau : Très difficile / type Bac On travaille sur $[-\pi; \pi]$. Pour $m \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation $\cos x = m$.

1. Discuter le nombre de solutions lorsque $m > 1$, $m = 1$, $-1 < m < 1$, $m = -1$ et $m < -1$.
2. Pour $-1 < m < 1$, on note $\alpha \in]0; \pi[$ l'unique réel tel que $\cos \alpha = m$. Donner les solutions de $\cos x = m$.
3. Toujours pour $-1 < m < 1$, résoudre $\cos x \leq m$ sur $[-\pi; \pi]$.
4. Appliquer les résultats à $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 28 - Équation et inéquation polynomiales en $\cos x$

Niveau : Très difficile / type Bac On considère sur $[-\pi; \pi]$

$$P(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1.$$

1. Factoriser $P(x)$ en fonction de $\cos x$.
2. Résoudre $P(x) = 0$ sur $[-\pi; \pi]$.
3. Résoudre $P(x) \leq 0$ sur $[-\pi; \pi]$.
4. Déterminer les intervalles sur lesquels $P(x) > 0$.

Exercice 29 - Quotient non évident : $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$

Niveau : Très difficile / type Bac On définit sur $[0; \pi]$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

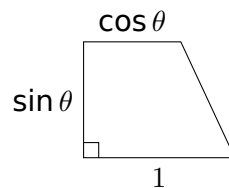
1. Justifier que f est définie sur tout $[0; \pi]$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{\cos x (3 - \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}.$$

3. Dresser les variations de f et déterminer son maximum.
4. Résoudre $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 30 - Synthèse Bac : optimisation d'un trapèze

Niveau : Très difficile / type Bac Pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on considère un trapèze rectangle dont les bases parallèles ont pour longueurs 1 et $\cos \theta$, et dont la hauteur vaut $\sin \theta$. On note $\mathcal{A}(\theta)$ son aire.



1. Montrer que

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta (1 + \cos \theta).$$

2. Montrer que

$$\mathcal{A}'(\theta) = \frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1).$$

3. Factoriser la dérivée, puis dresser les variations de $\mathcal{A}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Déterminer la valeur de θ qui maximise l'aire et calculer cette aire maximale.