

Fonction logarithme népérien

Exercice 1 - Propriétés fondamentales du logarithme

Facile

Simplifier exactement les quatre expressions suivantes.

1. $\ln(e^4)$.
2. $e^{\ln 7}$.
3. $\ln(12) - \ln(3)$.
4. $\ln(\sqrt{e^6})$.

Exercice 2 - Équations logarithmiques élémentaires

Facile

Résoudre les équations en indiquant à chaque fois la condition d'existence utile.

1. Résoudre $\ln(3x - 2) = 0$.
2. Résoudre $\ln(5 - x) = \ln 2$.
3. Résoudre $2 \ln x = \ln 9$.
4. Résoudre $\ln x = -2$.

Exercice 3 - Inéquations logarithmiques usuelles

Facile

Résoudre les inéquations suivantes en tenant compte du domaine.

1. $\ln(x - 2) \geq 0$.
2. $\ln(6 - x) < 0$.
3. $\ln(2x + 1) \leq \ln 7$.
4. $\ln x < 2$.

Exercice 4 - Dériver des fonctions logarithmiques

Facile

Pour chaque fonction, préciser son domaine utile puis calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \ln(4x + 1)$.
2. $g(x) = \ln(x^2 + 3x + 5)$.
3. $h(x) = x \ln x$.
4. $k(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 5 - Signe, variations et limites de référence

Facile

On travaille avec la fonction $\ln$ sur son domaine.

1. Donner le signe de $\ln x$ sur $]0; 1[$, en 1 et sur $]1; +\infty[$.
2. Résoudre $\ln x = 1$.
3. Justifier que $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
4. Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$.

Exercice 6 - Étude complète de $x \ln x$ *Moyen*

On considère $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de f .
3. Déterminer le minimum de f .
4. Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 7 - Étude de $\frac{\ln x}{x}$ *Moyen*

On considère $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de g .
3. Déterminer le maximum de g .
4. Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 8 - Démontrer $\ln x \leq x - 1$ *Moyen*

On définit $h(x) = \ln x - x + 1$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Étudier les variations de h .
3. Déterminer le maximum de h .
4. En déduire une inégalité valable pour tout $x > 0$.

Exercice 9 - Produits et quotients de logarithmes*Moyen*

Résoudre les deux équations en détaillant le domaine et les transformations.

1. Déterminer le domaine de $\ln x + \ln(x - 1) = 0$.
2. Résoudre $\ln x + \ln(x - 1) = 0$.
3. Résoudre $\ln(x + 1) - \ln x = \ln 2$.
4. Résoudre $\ln x + \ln(4 - x) = \ln 3$.

Exercice 10 - Croissances comparées avec le logarithme*Moyen*

Calculer les quatre limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$.

Exercice 11 - Variations et convexité de $\ln(x^2 + 1)$ *Difficile*

On considère $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
2. Déterminer le minimum de f .
3. Calculer $f''(x)$.
4. Étudier la convexité et donner les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 12 - Logarithme d'un quotient rationnel*Difficile*

On définit

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

1. Déterminer le domaine D_g .
2. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur D_g .
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles du domaine.
4. Calculer les quatre limites aux extrémités des deux intervalles du domaine.

Exercice 13 - Famille $f_a(x) = \ln x - ax$ *Difficile*

Soit $a > 0$. On définit $f_a(x) = \ln x - ax$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'_a(x)$ et déterminer l'abscisse du maximum.
2. Calculer la valeur maximale de f_a .
3. Déterminer pour quelles valeurs de a l'équation $\ln x = ax$ possède deux solutions positives.
4. Étudier le cas limite $a = \frac{1}{e}$.

Exercice 14 - Équation transcendante et dichotomie*Difficile*

On considère $h(x) = x + \ln x - 3$ sur $]0; +\infty[$. On note α l'éventuelle solution de $h(x) = 0$.

1. Calculer $h'(x)$ et montrer que h est strictement croissante.
2. Calculer les limites de h en 0^+ et en $+\infty$, puis justifier l'existence et l'unicité de α .
3. Montrer que $2 < \alpha < 3$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Exercice 15 - Concavité et tangente à la courbe de $\ln$ *Difficile*

On étudie la fonction $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$.
3. En utilisant la concavité, retrouver $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$.
4. En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{1}{x}$, établir une minoration de $\ln x$.

Exercice 16 - Étude de $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ *Difficile*

On pose $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f .
3. Déterminer le maximum de f .
4. Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 17 - Inégalité $\ln(1+t) \leq t$ *Difficile*

On définit $f(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 0$.

1. Étudier les variations de f .
2. Déterminer le minimum de f .
3. En posant $x = 1 + t$, démontrer que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.
4. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une majoration de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 18 - Équation $\ln x = 2 \ln(x-1)$ *Difficile*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln x = 2 \ln(x-1).$$

1. Déterminer le domaine de l'équation.
2. Transformer l'équation sans logarithme.
3. Résoudre l'équation algébrique obtenue.
4. Conserver uniquement les solutions admissibles.

Exercice 19 - Inéquation avec logarithme d'un trinôme*Difficile*

Résoudre

$$\ln(x^2 - 3x + 2) \geq 0.$$

1. Déterminer le domaine.
2. Transformer l'inéquation en une inéquation algébrique.
3. Résoudre $x^2 - 3x + 1 \geq 0$.
4. Donner l'ensemble solution final après intersection avec le domaine.

Exercice 20 - Substitution exponentielle puis logarithme*Difficile*

On étudie l'expression $e^{2x} - 5e^x + 6$.

1. Poser $X = e^x$ et préciser la contrainte sur X .
2. Résoudre $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
3. Résoudre $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$.
4. Résoudre $e^{2x} - 5e^x + 6 \geq 0$.

Exercice 21 - Équation paramétrée $\ln x = x + a$ *Très difficile*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on étudie les solutions positives de

$$\ln x = x + a.$$

1. Définir $g_a(x) = \ln x - x - a$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations et déterminer le maximum de g_a .
3. Calculer les limites de g_a aux deux extrémités du domaine.
4. Classer le nombre de solutions selon a .

Exercice 22 - Nombre de solutions de $e^x = kx$ *Très difficile*

Soit $k > 0$. On cherche les solutions positives de $e^x = kx$.

1. Montrer que l'équation est équivalente à $x - \ln x = \ln k$.
2. Étudier $\varphi(x) = x - \ln x$ et déterminer son minimum.
3. Classer le nombre de solutions selon k .
4. Appliquer au cas $k = 3$.

Exercice 23 - Étude de $x(\ln x)^2$ *Très difficile*

On considère $f(x) = x(\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$, factoriser et étudier son signe.
2. Donner les variations et les extrema locaux.
3. Calculer $f''(x)$ et déterminer le point d'inflexion.
4. Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 24 - Limite $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ **par encadrement***Très difficile*

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Avec $t = \frac{1}{x}$, réécrire $F(x)$.
2. En utilisant les inégalités établies précédemment, vérifier que $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$, puis en déduire $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ pour $t > 0$.
3. Diviser l'encadrement par $t > 0$.
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 25 - Fonction composée $\ln(\ln x)$ *Très difficile*

On considère $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Déterminer précisément le domaine de f .
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations.
3. Calculer les limites en 1^+ et en $+\infty$.
4. Calculer $f''(x)$ et conclure sur la concavité.

Exercice 26 - Symétrie logarithmique et extrema*Très difficile*

On définit

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + (\ln x)^2}, \quad x > 0.$$

1. Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations et déterminer les extrema.
4. Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 27 - Étude de $\ln x + \frac{1}{x}$ *Très difficile*

On considère

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations.
2. Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer le minimum de f .
4. En déduire une inégalité et résoudre $\ln x + \frac{1}{x} = 1$.

Exercice 28 - Résoudre numériquement $\ln x = \frac{1}{x}$ *Très difficile*

On définit $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. On note α la solution éventuelle de $h(x) = 0$.

1. Calculer $h'(x)$ et montrer que h est strictement croissante.
2. Calculer les limites de h aux extrémités et justifier l'unicité de α .
3. Montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$.
4. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 et une valeur approchée au millièm.

Exercice 29 - Étude de $\ln(x^2 - 1)$ *Très difficile*On considère $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

1. Déterminer le domaine de f .
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations sur chaque intervalle du domaine.
3. Calculer les limites en $-\infty$, -1^- , 1^+ et $+\infty$.
4. Résoudre $f(x) = \ln 3$.

Exercice 30 - Synthèse Bac : logarithme et symétrie $x \mapsto \frac{1}{x}$ *Très difficile*On définit sur $]0; +\infty[$

$$F(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}.$$

1. Montrer que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

2. Calculer $F'(x)$ et montrer que F est strictement croissante.
3. Résoudre $F(x) = 0$ et déterminer le signe de F .
4. En déduire une comparaison entre $\ln x$ et $\frac{x-1}{x+1}$ selon que x est inférieur ou supérieur à 1.