

Exercices – Dérivation, convexité et continuité

Terminale Spécialité – 30 exercices – version exercices seuls

Exercice 1 – Produit exponentiel – variations, convexité et point d’inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
2. Calculer $f''(x)$.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnées du point d’inflexion de la courbe de f .

Exercice 2 – Logarithme contre fonction affine – maximum et inégalité

On considère f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{x}{2}$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer le maximum de f et montrer que l’équation $f(x) = 0$ n’a aucune solution.
4. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x < \frac{x}{2}$.

Exercice 3 – Exponentielle – convexité et inégalité fondamentale

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
2. Calculer $f''(x)$ et justifier que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de f au point d’abscisse 0.
4. En déduire l’inégalité $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x , et préciser le cas d’égalité.

Exercice 4 – Composition avec une racine – convexité et tangente

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f .
3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de f au point d’abscisse 1.
4. En déduire que, pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} \geq \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5 – Logarithme composé – concavité et tangente

On considère f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Montrer que f est strictement concave sur $] -1; +\infty[$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. En déduire que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

Exercice 6 – Fonction x^2e^{-x} – extrema et changements de convexité

On considère $f(x) = x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier ses variations.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Étudier la convexité de f et déterminer ses points d'inflexion.
4. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{4}{e^2}$.

Exercice 7 – Quotient logarithmique – maximum et inflexion

On considère $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f et déterminer son maximum.
3. Calculer $f''(x)$, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe.
4. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2e}$ admet exactement deux solutions positives.

Exercice 8 – Raccordement – continuité, dérivabilité et convexité

Pour $a, c \in \mathbb{R}$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + ax, & x \leq 0, \\ x^2 + c, & x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer c pour que f soit continue en 0.
2. Avec cette valeur de c , déterminer a pour que f soit dérivable en 0.
3. Pour les valeurs obtenues, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la fonction obtenue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Deux zéros d'une fonction convexe – TVI et dichotomie

On considère $f(x) = e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
2. Calculer $f''(x)$ et justifier que f est strictement convexe.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, l'une dans $]0; 1[$, l'autre dans $]1; 2[$.
4. Écrire un algorithme de dichotomie qui encadre la seconde solution avec une largeur inférieure à 10^{-3} .

Exercice 10 – Minimum logarithmique – discussion du nombre de solutions

On considère $f(x) = \ln x + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations et déterminer le minimum de f .
3. Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a exactement deux solutions : 1 et une seconde solution $\beta \in]4; 5[$.

Exercice 11 – Produit affine-exponentielle – tangente et convexité locale

On considère $f(x) = (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f et déterminer son minimum.
2. Calculer $f''(x)$, puis étudier la convexité de f .
3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion et l'équation de la tangente en $x = 0$.
4. Justifier que $(x - 1)e^x \geq -1$ pour tout réel x , avec égalité uniquement en 0.

Exercice 12 – Fonction $x + e^{-x}$ – convexité et équations à paramètre

On considère $f(x) = x + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux deux infinis, puis étudier ses variations.
2. Étudier la convexité de f .
3. Discuter, selon $k \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de $f(x) = k$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède deux solutions, l'une dans $] -2; -1[$, l'autre dans $]1; 2[$.

Exercice 13 – Paramètre logarithmique – tangente horizontale et minimum

Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = e^x - a \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'_a(x)$ et montrer que l'équation $f'_a(x) = 0$ admet une unique solution $\beta_a > 0$.
2. En déduire que f_a admet un unique minimum, atteint en β_a .
3. Déterminer la valeur de a pour laquelle la tangente à la courbe en $x = 1$ est horizontale.
4. Pour cette valeur de a , déterminer le minimum et en déduire une inégalité valable pour tout $x > 0$.

Exercice 14 – Fonction entropique – convexité et inégalité par tangente

On considère $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer la limite en 0^+ , puis étudier les variations de f .
2. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$.
4. En déduire l'inégalité $x \ln x \geq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 15 – Polynôme cubique – trois racines et point d'inflexion

On considère $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

2. Étudier la convexité de f et déterminer son point d'inflexion.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, situées respectivement dans $] - 2; -1[$, $]0; 1[$ et $]1; 2[$.
4. Déterminer la tangente en $x = 0$ et préciser de quel côté de cette tangente se trouve la courbe selon le signe de x .

Exercice 16 – Fonction rationnelle – variations, convexité et asymptote

On considère $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x + 1}$, puis déterminer les limites en -1^- et -1^+ .
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité sur chacun des intervalles du domaine.
4. Montrer que la droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique et préciser la position relative de la courbe et de cette droite.

Exercice 17 – Fonction logistique – dérivées, inflexion et tangente

On considère $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles de convexité et de concavité.
3. Déterminer le point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.
4. Comparer la courbe à cette tangente sur $] - \infty; 0]$ puis sur $[0; +\infty[$.

Exercice 18 – Quotient $\frac{\ln x}{1 + x}$ – fonction auxiliaire et maximum

On considère $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis calculer $f'(x)$.
2. On pose $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \ln x$. Montrer que g est strictement décroissante et qu'elle s'annule une unique fois en un réel $\alpha > 1$.
3. En déduire les variations de f et montrer que son maximum vaut $\frac{1}{\alpha}$.
4. Montrer que $3 < \alpha < 4$, puis encadrer le maximum de f .

Exercice 19 – Fonction convexe $x^2 - 2 \ln x$ – tangente et équations

On considère $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine et étudier ses variations.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer la tangente en $x = 1$ et en déduire $x^2 - 2 \ln x \geq 1$.
4. Discuter, selon $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Exercice 20 – Équation $x + \ln x = 2$ – TVI, concavité et Newton

On pose $f(x) = x + \ln x - 2$ sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$.
2. Étudier la concavité de f .
3. Établir la formule de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \ln x_n - 2}{1 + \frac{1}{x_n}}$.
4. Avec $x_0 = 1$, calculer x_1 puis x_2 , et donner une approximation de α .

Exercice 21 – Paramètre m – intersections entre exponentielle et droite

Pour $m > 0$, on considère $f_m(x) = e^x - mx$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations et la convexité de f_m .
2. Montrer que le minimum est atteint en $x = \ln m$ et vaut $m(1 - \ln m)$.
3. Discuter, selon m , le nombre de solutions de l'équation $e^x = mx$.
4. Interpréter géométriquement le cas limite $m = e$.

Exercice 22 – Fonction x^x – composition, convexité et niveaux

On considère $f(x) = x^x$ sur $]0; +\infty[$, soit $f(x) = e^{x \ln x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f et déterminer son minimum exact.
3. Montrer que f est strictement convexe sur $]0; +\infty[$.
4. Discuter, selon $k > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^x = k$.

Exercice 23 – Paramètre $\frac{a}{x}$ – seuil critique et double racine

Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f_a aux bornes du domaine et étudier ses variations.
2. Montrer que le minimum vaut $1 + \ln a$.
3. Discuter, selon $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $f_a(x) = 0$.
4. Déterminer le cas où l'équation possède une racine double et interpréter géométriquement ce cas.

Exercice 24 – Cubique à paramètre – extrema et nombre de solutions

Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = x^3 - 3ax$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f_a et calculer les valeurs aux deux extrema.
2. Étudier la convexité et déterminer le point d'inflexion.
3. Montrer que les niveaux remarquables sont $\pm 2a\sqrt{\frac{3}{2}}$.
4. Discuter, selon $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de $f_a(x) = m$.

Exercice 25 – Prolongement continu de $\frac{e^x - 1}{x}$ – étude globale

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. Définir $F(0)$ de façon que la fonction F , égale à f pour $x \neq 0$, soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $x \neq 0$, calculer $F'(x)$ et montrer que son signe est positif à l'aide de $g(x) = e^x(x - 1) + 1$.
4. En déduire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis comparer $F(x)$ à 1 selon le signe de x .

Exercice 26 – Fonction $\ln(1 + e^x)$ – convexité et asymptotes

On considère $f(x) = \ln(1 + e^x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les limites de f' aux deux infinis.
2. Calculer $f''(x)$ et montrer que f est strictement convexe.
3. Déterminer la tangente en $x = 0$ et en déduire une minoration de $f(x)$.
4. Montrer que $y = 0$ est asymptote en $-\infty$ et que $y = x$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 27 – Somme d'exponentielles – paramètre, minimum et inégalité

Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = e^x + ae^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'_a(x)$ et déterminer l'unique point critique.
2. Montrer que f_a est strictement convexe et calculer son minimum.
3. Discuter, selon $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de $f_a(x) = m$.
4. En déduire l'inégalité $e^x + ae^{-x} \geq 2\sqrt{a}$, et préciser le cas d'égalité.

Exercice 28 – Quotient $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ – deux changements de régime

On considère $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f et calculer son maximum.
3. Calculer $f''(x)$ et déterminer le point d'inflexion.
4. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{e}$ admet exactement deux solutions positives.

Exercice 29 – Newton sur $xe^x = 2$ – monotonie, convexité et approximation

On considère $f(x) = xe^x - 2$ sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$.
2. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$.
3. Établir la formule de Newton associée à $f(x) = 0$.
4. Avec $x_0 = 1$, calculer x_1 puis x_2 , et donner une approximation de α .

Exercice 30 – Synthèse Bac – convexité, deux racines, dichotomie et signe

On considère $f(x) = e^x - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux deux infinis, puis étudier ses variations et sa convexité.
2. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \in]-2; -1[$ et $\beta \in]1; 2[$.
3. Écrire un algorithme de dichotomie qui encadre β à 10^{-4} près.
4. À l'aide des variations et de la convexité, donner le signe de f sur $\mathbb{R}$ et interpréter ce signe par rapport à la droite $y = x + 2$.