

Terminale Spécialité – Combinatoire et dénombrement

Exercice 1 – Codes et nombres à quatre chiffres

On utilise les chiffres de 0 à 9. Distinguer soigneusement un code d'un entier à quatre chiffres.

1. Combien de codes de 4 chiffres peut-on former si les répétitions sont autorisées ?
2. Combien de codes de 4 chiffres peut-on former sans répétition ?
3. Combien d'entiers à 4 chiffres peut-on former si les répétitions sont autorisées ?
4. Combien d'entiers à 4 chiffres distincts peut-on former ?

Exercice 2 – Permutations de livres - voisinage et ordre

Six livres distincts, dont deux livres particuliers A et B , sont rangés sur une étagère.

1. Combien de rangements sont possibles sans contrainte ?
2. Combien de rangements placent A et B côte à côte ?
3. Combien de rangements ne placent pas A et B côte à côte ?
4. Combien de rangements placent A avant B ?

Exercice 3 – Choisir un comité avec personnes imposées

Dans un groupe de 12 élèves, on choisit un comité de 4 élèves. Deux élèves particuliers sont notés A et B .

1. Combien de comités de 4 élèves peut-on former ?
2. Combien de comités contiennent A ?
3. Combien de comités ne contiennent pas A ?
4. Combien de comités contiennent exactement l'un des deux élèves A et B ?

Exercice 4 – Sous-ensembles et mots binaires

Soit E un ensemble de 5 éléments. On associe à chaque partie de E un mot binaire de longueur 5 indiquant, pour chaque élément, s'il est choisi (1) ou non (0).

1. Combien de parties possède E ?
2. Combien de parties de E ont exactement 3 éléments ?
3. Combien de mots binaires de longueur 5 contiennent exactement 3 chiffres 1 ?
4. Expliquer pourquoi les réponses aux questions 2 et 3 sont égales.

Exercice 5 – Symétrie et relation de Pascal

On travaille avec les coefficients binomiaux.

1. Calculer $\binom{8}{2}$.
2. En déduire $\binom{8}{6}$ sans nouveau calcul factoriel.
3. Calculer $\binom{9}{3}$ à l'aide de la relation de Pascal.
4. Calculer $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}$ et interpréter le résultat.

Exercice 6 – Choix ordonnés puis membres sans rôle

Parmi 8 personnes, on attribue éventuellement des fonctions distinctes puis on complète un groupe.

1. Combien de façons d'attribuer les rôles de président, secrétaire et trésorier à trois personnes distinctes ?
2. Combien de comités de 3 personnes sans rôle peut-on former ?
3. Expliquer pourquoi le premier nombre vaut 3! fois le second.
4. Après attribution des trois rôles, on choisit encore 2 membres sans rôle parmi les 5 personnes restantes. Combien d'équipes dirigeantes complètes obtient-on ?

Exercice 7 – Mots avec effectifs imposés

On forme des mots de longueur 7 avec l'alphabet $\{A, B, C\}$.

1. Combien de mots contiennent exactement 3 lettres A et exactement 2 lettres B ?
2. Combien de mots contiennent exactement 3 lettres A ?
3. Combien contiennent exactement 3 lettres A et au moins 2 lettres B ?
4. Combien contiennent exactement 3 lettres A et au moins une lettre B ?

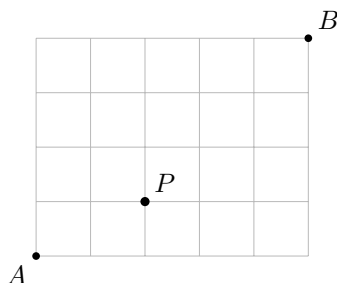
Exercice 8 – Anagrammes du mot BANANE

On étudie les anagrammes distinctes du mot BANANE, qui contient 6 lettres avec deux A et deux N .

1. Combien d'anagrammes distinctes peut-on former?
2. Combien commencent par B ?
3. Combien commencent par B et se terminent par E ?
4. Combien ont les deux lettres A côte à côte?

Exercice 9 – Chemins minimaux sur une grille

Sur la grille ci-dessous, un chemin minimal de A à B comporte exactement 5 pas vers la droite et 4 pas vers le haut. Le point P se trouve après 2 pas à droite et 1 pas vers le haut.



1. Combien existe-t-il de chemins minimaux de A à B ?
2. Combien de chemins minimaux passent par P ?
3. Combien de chemins minimaux évitent P ?
4. Combien de chemins commencent par un pas à droite et se terminent par un pas vers le haut?

Exercice 10 – Comités avec deux catégories

Un groupe comprend 6 filles et 5 garçons. On choisit un comité de 4 personnes.

1. Combien de comités contiennent exactement 2 filles?
2. Combien de comités contiennent au moins une fille?
3. Combien contiennent au moins 2 filles et au moins 1 garçon?
4. Une fille particulière A doit appartenir au comité, qui contient exactement 3 filles. Combien de comités conviennent?

Exercice 11 – Plaques : lettres, chiffres et contraintes

Une plaque comporte trois lettres choisies parmi 8 lettres distinctes, suivies de deux chiffres choisis parmi 10 chiffres. Sauf indication contraire, les lettres sont distinctes entre elles et les chiffres aussi.

1. Combien de plaques sont possibles?
2. Si l'ordre des trois lettres n'était pas pris en compte, mais l'ordre des deux chiffres restait pris en compte, combien aurait-on de choix?
3. Si la première lettre est imposée, combien de plaques restent possibles?
4. Deux lettres particulières A et B sont disponibles parmi les 8. Combien de plaques contiennent au moins l'une d'elles dans les trois positions de lettres?

Exercice 12 – Deux objets non adjacents dans une permutation

On permute 8 objets distincts, dont deux objets particuliers A et B .

1. Combien de permutations sont possibles ?
2. Combien placent A et B non adjacents ?
3. Parmi les permutations non adjacentes, combien placent A avant B ?
4. Combien de permutations placent exactement un objet entre A et B ?

Exercice 13 – Mots binaires sans deux 1 consécutifs

On considère les mots binaires de longueur 12 contenant exactement 5 chiffres 1, sans deux 1 consécutifs.

1. Montrer qu'un tel mot est déterminé par le choix de 5 positions parmi 8, après suppression de quatre zéros séparateurs obligatoires.
2. En déduire le nombre total de mots.
3. Combien de ces mots commencent par 1 ?
4. Combien commencent et se terminent par 1 ?

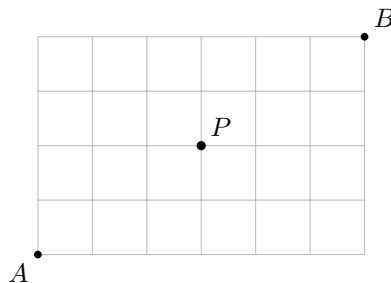
Exercice 14 – Comité avec deux contraintes logiques

Parmi 12 personnes figurent quatre personnes particulières A, B, C, D . On choisit un groupe de 5 personnes.

1. Combien de groupes contiennent exactement l'une des deux personnes A et B ?
2. Parmi ces groupes, combien contiennent en plus au moins l'une des personnes C, D ?
3. Combien satisfont la première contrainte et contiennent exactement l'une des personnes C, D ?
4. Combien satisfont la première contrainte et contiennent à la fois C et D ? Vérifier que les questions 3 et 4 recomposent la question 2.

Exercice 15 – Chemins passant par un point imposé

Sur une grille, un chemin minimal de A à B comporte 6 pas vers la droite et 4 vers le haut. Le point P est situé après 3 pas à droite et 2 pas vers le haut.



1. Combien existe-t-il de chemins minimaux de A à B ?
2. Combien passent par P ?
3. Combien évitent P ?
4. Combien passent par P et commencent par un pas à droite ?

Exercice 16 – Relation de Pascal et identité des sous-ensembles

On exploite la relation de Pascal et l'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux.

1. Calculer $\binom{13}{5}$ en utilisant $\binom{12}{5} = 792$ et $\binom{12}{4} = 495$.
2. Donner une démonstration combinatoire de $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
3. Calculer $\binom{14}{5} - \binom{13}{4}$ sans développer les factorielles.
4. Calculer $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k}$ par dénombrement.

Exercice 17 – Sous-ensembles contenant des éléments fixés

Soit E un ensemble de 10 éléments contenant deux éléments particuliers A et B . On considère les parties de cardinal 4.

1. Combien contiennent A ?
2. Combien ne contiennent pas A ?
3. Combien contiennent exactement l'un des deux éléments A, B ?
4. Combien contiennent au moins l'un des deux éléments A, B ?

Exercice 18 – Anagrammes de MISSISSIPPI

Le mot MISSISSIPPI contient 11 lettres : 1 M, 4 I, 4 S et 2 P.

1. Combien d'anagrammes distinctes possède ce mot ?
2. Combien commencent par M ?
3. Combien commencent par M et se terminent par I ?
4. Combien ont les quatre lettres I consécutives ?

Exercice 19 – Partager huit personnes en deux équipes

Huit personnes doivent être réparties en deux équipes de 4. Deux personnes particulières sont A et B .

1. Si les équipes sont nommées X et Y , combien de répartitions sont possibles ?
2. Si les équipes ne sont pas nommées, combien de partitions sont possibles ?
3. Avec équipes nommées, combien de répartitions placent A et B dans des équipes différentes ?
4. Avec équipes non nommées, combien de partitions placent A et B dans des équipes différentes ?

Exercice 20 – Boucles imbriquées et combinaisons

On considère le pseudo-code suivant :

```
c = 0
pour i de 0 à 5
  pour j de i+1 à 5
    c = c + 1
```

1. Quel objet combinatoire est compté par la variable c ?
2. Quelle est la valeur finale de c ?
3. Si l'on ajoute une troisième boucle de la forme « pour k de $j+1$ à 5 », combien d'itérations du bloc intérieur obtient-on ?
4. Avec quatre boucles strictement croissantes sur les indices $0, \dots, 7$, combien d'itérations du bloc intérieur obtient-on ?

Exercice 21 – Séquences ADN sans répétition consécutive

Une séquence ADN simplifiée de longueur 6 est un mot sur l'alphabet $\{A, C, G, T\}$.

1. Combien de séquences de longueur 6 existe-t-il sans contrainte ?
2. Combien n'ont jamais deux lettres consécutives identiques ?
3. Combien de ces séquences commencent par A ?
4. Combien commencent par A puis C ?

Exercice 22 – Bits répartis entre deux blocs

On considère les mots binaires de longueur 12 contenant exactement 5 chiffres 1. On impose en plus qu'il y ait exactement 3 chiffres 1 parmi les six premières positions.

1. Combien de mots satisfont ces deux conditions ?
2. Combien commencent par 1 et se terminent par 0 ?
3. Combien commencent par 0 et se terminent par 1 ?
4. Combien ont des premier et dernier caractères différents ?

Exercice 23 – Deux paires de livres : inclusion-exclusion

On range 10 livres distincts. Deux paires particulières sont (A, B) et (C, D) .

1. Combien de rangements placent simultanément A, B côte à côte et C, D côte à côte ?
2. Combien de rangements placent au moins l'une des deux paires côte à côte ?
3. Combien de rangements ne placent aucune des deux paires côte à côte ?
4. Combien de rangements placent exactement une des deux paires côte à côte ?

Exercice 24 – Chemins : premier et dernier pas

Un chemin minimal comporte 7 pas vers la droite R et 5 pas vers le haut H , soit 12 pas au total.

1. Combien existe-t-il de chemins minimaux ?
2. Combien commencent et se terminent par un pas R ?
3. Combien commencent et se terminent par un pas H ?
4. Combien commencent et se terminent par des pas de types différents ?

Exercice 25 – Podium avec deux clubs

Une finale réunit 8 athlètes : 3 du club A et 5 du club B. Le podium comporte trois places ordonnées.

1. Combien de podiums sont possibles sans contrainte ?
2. Combien de podiums contiennent exactement un athlète du club A ?
3. Combien contiennent exactement deux athlètes du club A ?
4. Combien de podiums contiennent au moins un athlète du club A ?

Exercice 26 – Contraintes d'ordre partiel dans une permutation

Huit tâches distinctes A, B, C, D, E, F, G, H doivent être exécutées dans un ordre total.

1. Combien d'ordres totaux sont possibles sans contrainte ?
2. Combien d'ordres respectent la contrainte A avant B ?
3. Combien d'ordres respectent A avant B avant C ?
4. Combien d'ordres respectent à la fois $A < B < C$ et $D < E$?

Exercice 27 – Double comptage des sous-ensembles marqués

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle objet marqué un couple (A, x) où A est une partie de E et $x \in A$.

1. En classant les objets marqués selon $|A| = k$, montrer que leur nombre vaut $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
2. Compter les mêmes objets en choisissant d'abord l'élément marqué x .
3. En déduire l'identité $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^8 k \binom{8}{k}$.

Exercice 28 – Identité de Vandermonde par double comptage

Deux groupes disjoints contiennent respectivement p et q personnes. On veut choisir un comité de r personnes dans leur réunion.

1. Combien de comités peut-on former directement ?
2. Si le comité contient exactement k personnes du premier groupe, combien y a-t-il de choix ?
3. En additionnant sur toutes les valeurs admissibles de k , établir $\sum_k \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$.
4. Vérifier numériquement l'identité pour $p = 5, q = 7, r = 4$.

Exercice 29 – Dénombrement dans un polygone convexe

On considère un polygone convexe à 15 sommets, sans trois sommets alignés.

1. Combien de segments joignent deux sommets du polygone ?
2. Combien le polygone possède-t-il de diagonales ?
3. Combien de triangles ont leurs sommets parmi les sommets du polygone ?
4. Combien de quadrilatères ont leurs sommets parmi les sommets du polygone ?

Exercice 30 – Synthèse - mains de cinq cartes

On travaille avec un jeu standard de 52 cartes : 13 valeurs et 4 couleurs. Une main de 5 cartes est un ensemble non ordonné de cinq cartes.

1. Combien de mains de 5 cartes existe-t-il ?
2. Combien de mains contiennent exactement deux as ?
3. Combien de fulls (trois cartes d'une même valeur et deux cartes d'une autre valeur) existe-t-il ?
4. Combien de mains contiennent un carré (les quatre cartes d'une même valeur) ?