

Exercices — Calcul intégral

Terminale Spécialité — 30 exercices — version élève

Exercice 1 — Primitives de référence et formes composées

Calculer exactement les intégrales suivantes en identifiant, pour chacune, une primitive adaptée.

1. $I_1 = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 2) dx.$

2. $I_2 = \int_0^1 2xe^{x^2} dx.$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3} dx.$

4. $I_4 = \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$

Exercice 2 — Linéarité, Chasles et changement de bornes

Soit f continue sur $[0, 5]$. On sait que $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_2^5 f(x) dx = -1$. On suppose en outre que $f \geq 0$ sur $[0, 2]$ et $f \leq 0$ sur $[2, 5]$.

1. Calculer $\int_0^5 f(x) dx.$

2. Calculer $\int_5^0 f(x) dx.$

3. Calculer $\int_0^5 (3f(x) - 2) dx.$

4. Déterminer l'aire géométrique comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 5$.

Exercice 3 — Intégrale algébrique et aire d'un trinôme

On considère $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[0, 4]$.

1. Factoriser f , déterminer ses zéros et dresser son signe sur $[0, 4]$.

2. Calculer $\int_0^4 f(x) dx.$

3. Calculer séparément $\int_0^1 f$, $\int_1^3 f$ et $\int_3^4 f$.

4. En déduire l'aire géométrique comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[0, 4]$.

Exercice 4 — Valeur moyenne d'une fonction

On considère $f(x) = xe^{x^2}$ sur $[0, 2]$.

1. Déterminer une primitive de f sur $[0, 2]$.

2. Calculer $\int_0^2 f(x) dx.$

3. Déterminer la valeur moyenne m de f sur $[0, 2]$.4. Montrer qu'il existe un unique réel $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = m$.

Exercice 5 — Aire entre une exponentielle et sa tangente

Sur $[0, 1]$, on considère $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 + x$.

1. Montrer que $e^x \geq 1 + x$ sur $[0, 1]$.2. Exprimer l'aire A comprise entre les deux courbes sur $[0, 1]$ sous forme d'une intégrale.3. Calculer exactement A .

- Donner une valeur approchée de A à 10^{-3} près et interpréter son signe.

Exercice 6 — Intégration par parties — xe^x

On souhaite calculer des intégrales contenant le produit d'un polynôme et de l'exponentielle.

- À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de xe^x .
- Calculer $\int_0^1 xe^x dx$.
- Calculer $\int_0^2 xe^x dx$.
- Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto xe^x$ sur $[0, 2]$.

Exercice 7 — Intégration par parties — logarithme

On travaille sur $]0, +\infty[$ avec la fonction logarithme népérien.

- À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $\ln x$.
- Calculer $\int_1^e \ln x dx$.
- Déterminer la valeur moyenne m de $\ln x$ sur $[1, e]$.
- Déterminer l'unique $c \in [1, e]$ tel que $\ln c = m$.

Exercice 8 — IPP trigonométrique et valeur moyenne

On considère des intégrales sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Calculer $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.
- Calculer $J = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$.
- En déduire $\int_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x) dx$.
- Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x(\sin x + \cos x)$ sur cet intervalle.

Exercice 9 — Fonction définie par une intégrale

Pour $x > 0$, on définit $F(x) = \int_1^x \ln t dt$.

- Déterminer une expression explicite de $F(x)$.
- Calculer $F'(x)$.
- Étudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que $F(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Exercice 10 — Encadrement d'une intégrale non élémentaire

On pose $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$. On ne cherche pas ici de primitive de e^{x^2} .

- Montrer que $x^2 \leq x$ sur $[0, 1]$, puis que $e^{x^2} \leq e^x$.
- À l'aide de l'inégalité $e^u \geq 1 + u$, montrer que $1 + x^2 \leq e^{x^2}$ sur $[0, 1]$.
- En déduire l'encadrement $\frac{4}{3} \leq I \leq e - 1$.
- Calculer l'amplitude de cet encadrement et en donner une valeur approchée.

Exercice 11 — IPP répétée — $x^2 e^x$

On pose $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$ et $J = \int_0^1 x e^x dx$.

1. À l'aide d'une IPP, établir $I = e - 2J$.
2. Calculer J .
3. En déduire la valeur exacte de I .
4. Vérifier que $x \mapsto e^x(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de $x^2 e^x$.

Exercice 12 — Intégrale dépendant d'un paramètre

Pour $a > -1$, on définit $I(a) = \int_0^1 \frac{2x + a}{x^2 + ax + 1} dx$.

1. Justifier que $x^2 + ax + 1 > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Calculer exactement $I(a)$.
3. Résoudre $I(a) = \ln 4$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction $a \mapsto I(a)$ sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 13 — Aire entre une droite et une parabole

On considère les courbes $\mathcal{C} : y = x^2$ et $\mathcal{D} : y = 2x + 3$.

1. Déterminer les abscisses de leurs points d'intersection.
2. Montrer que la droite est au-dessus de la parabole entre ces deux abscisses.
3. Calculer exactement l'aire comprise entre les deux courbes.
4. Déterminer la valeur moyenne de l'écart vertical $(2x + 3) - x^2$ sur l'intervalle délimité.

Exercice 14 — Valeur absolue et aire géométrique

On considère $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0, 2]$.

1. Étudier le signe de f sur $[0, 2]$.
2. Calculer l'intégrale algébrique $\int_0^2 f(x) dx$.
3. Calculer $\int_0^2 |f(x)| dx$.
4. Expliquer précisément pourquoi les deux résultats des questions 2 et 3 sont différents.

Exercice 15 — Borne variable dans une intégrale

Pour tout réel x , on définit $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + 1) dt$.

1. Déterminer une expression explicite de $F(x)$.
2. Calculer $F'(x)$ et vérifier le résultat à partir de l'expression explicite.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $F(x) = \frac{4}{3}$.

Exercice 16 — Valeur moyenne du logarithme

On considère $f(x) = \ln x$ sur $[1, e^2]$.

1. Calculer $\int_1^{e^2} \ln x dx$.
2. Déterminer la valeur moyenne m de f sur $[1, e^2]$.

- Montrer que $1 < m < 2$.
- Déterminer l'unique $c \in]e, e^2[$ tel que $\ln c = m$.

Exercice 17 — Suite d'intégrales — récurrence par IPP

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- Montrer que $0 < I_n \leq \frac{e}{n+1}$, puis en déduire la limite de (I_n) .
- Établir, pour tout $n \geq 0$, la relation $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- Calculer I_0 et I_1 .
- Calculer exactement I_2 et I_3 .

Exercice 18 — Suite d'intégrales rationnelles

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déterminer $\lim u_n$.
- Montrer que $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
- Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
- Calculer exactement u_3 .

Exercice 19 — Approximation de $\ln 2$ par rectangles et trapèzes

On utilise $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ et une subdivision de $[1, 2]$ en 4 intervalles de même longueur.

- Donner les cinq points de subdivision et la largeur h .
- Calculer exactement la somme des rectangles à gauche L_4 et la somme des rectangles à droite R_4 .
- Justifier l'encadrement $R_4 \leq \ln 2 \leq L_4$.
- Calculer l'approximation trapézoïdale $T_4 = \frac{L_4 + R_4}{2}$ et son erreur absolue à l'aide de $\ln 2 \approx 0,693147$.

Exercice 20 — Interprétation physique d'une intégrale

La vitesse d'un mobile, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, est $v(t) = 3t^2 - 6t + 4$ pour $t \in [0, 3]$.

- Montrer que $v(t) > 0$ sur $[0, 3]$.
- Calculer la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 3$.
- Déterminer la vitesse moyenne sur cet intervalle.
- Déterminer un instant $t \in]0, 3[$ où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

Exercice 21 — IPP répétée trigonométrique

On pose $I = \int_0^\pi x^2 \sin x dx$.

- Effectuer une première IPP et exprimer I en fonction de $J = \int_0^\pi x \cos x dx$.
- Calculer exactement J .
- En déduire la valeur exacte de I .
- Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2 \sin x$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 22 — Suite pondérée par $\ln(1+x)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$.

1. Montrer que $0 \leq v_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. Calculer exactement v_0 .
4. À l'aide d'une IPP, calculer exactement v_1 .

Exercice 23 — Aire avec paramètre — droite et parabole

Pour $a > 0$, on considère la droite $y = ax$ et la parabole $y = x^2$.

1. Déterminer leurs points d'intersection et l'ordre des deux courbes entre ces points.
2. Montrer que l'aire délimitée par les deux courbes est $A(a) = \frac{a^3}{6}$.
3. Déterminer a lorsque $A(a) = \frac{9}{2}$.
4. Pour cette valeur de a , déterminer la valeur moyenne de l'écart vertical $ax - x^2$ entre les deux courbes.

Exercice 24 — Minimisation d'une intégrale quadratique

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \int_0^1 (x-a)^2 dx$.

1. Développer l'intégrande et calculer $I(a)$ sous forme d'un trinôme en a .
2. Mettre $I(a)$ sous forme canonique.
3. Déterminer la valeur de a qui minimise $I(a)$, ainsi que la valeur minimale.
4. Relier la valeur optimale de a à la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$.

Exercice 25 — Fonction intégrale et signe — synthèse

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. On définit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que $f(0) < 0 < f(1)$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
3. Étudier les variations de F sur $[0, 1]$ et localiser son minimum.
4. Montrer que $F(x) < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Exercice 26 — Approfondissement — sommes harmoniques et intégrales

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. On utilise la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, décroissante sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
2. En sommant, établir $\ln(n+1) \leq H_n$.
3. Montrer également $H_n \leq 1 + \ln n$.
4. En déduire que $H_n \rightarrow +\infty$ et donner un encadrement numérique de H_{100} .

Exercice 27 — Monte-Carlo et aire sous une courbe

Dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, on considère la région D située sous la courbe $y = 1 - x^2$.

1. Calculer exactement l'aire de D .

- On choisit au hasard un point (X, Y) uniformément dans le carré. Quelle est la probabilité qu'il appartienne à D ?
- Une simulation de 2000 points donne 1328 points dans D . Donner l'estimation Monte-Carlo de l'aire.
- Expliquer pourquoi cette estimation doit se rapprocher de l'aire exacte lorsque le nombre de points simulés augmente.

Exercice 28 — Paramètre dans une intégrale logarithmique

Pour $a > 0$, on pose $K(a) = \int_0^1 \frac{1}{a+x} dx$.

- Calculer exactement $K(a)$.
- Montrer que K est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer les limites de $K(a)$ lorsque $a \rightarrow 0^+$ puis lorsque $a \rightarrow +\infty$.
- Résoudre $K(a) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 29 — Aire géométrique avec paramètre et compensation

Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = x^2 - 2ax$ sur $[0, 3a]$.

- Étudier le signe de f_a sur $[0, 3a]$.
- Calculer $\int_0^{3a} f_a(x) dx$.
- Montrer que l'aire géométrique entre la courbe de f_a et l'axe des abscisses vaut $A(a) = \frac{8a^3}{3}$.
- Déterminer a lorsque cette aire vaut 72.

Exercice 30 — Synthèse Bac — énergie cumulée

La puissance délivrée par un dispositif est modélisée, pour $t \geq 0$, par $p(t) = te^{-t/2}$. On note $E(T) = \int_0^T p(t) dt$, énergie cumulée jusqu'à l'instant T .

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $E(T) = 4 - (2T + 4)e^{-T/2}$.
- Montrer que E est croissante sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{T \rightarrow +\infty} E(T) = 4$.
- Traduire la condition « au moins 90% de l'énergie limite a été délivrée » par une inégalité portant sur T .
- À la calculatrice, déterminer à 10^{-2} près le plus petit temps T garantissant cette condition.