

Fiche de révision

Limites de suites (Terminale spécialité)

1. Définitions et notations

- Une **suite** réelle est une fonction

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u_n.$$

- On note souvent $(u_n)_{n \geq 0}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$.
- Exemples :
 - Suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr$.
 - Suite géométrique : $u_n = u_0 q^n$.
 - Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Suites majorées, minorées, monotones

Bornes

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Monotonie

- (u_n) est **croissante** si $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$.

Théorème des suites monotones

- Une suite **croissante** et **majorée** est convergente.
- Une suite **décroissante** et **minorée** est convergente.

3. Limites usuelles importantes

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Plus généralement, pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ pour $\alpha > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, mais $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$.

Comparaisons de croissance (ordre de grandeur) :

$$\ln n \ll n^\alpha \ll a^n \quad (a > 1, \alpha > 0).$$

4. Suites géométriques $(u_n) = u_0 q^n$

- Premier terme u_0 , raison $q \in \mathbb{R}$.

Cas $|q| < 1$

- $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$.
- Si $u_n = u_0 q^n$, alors $\lim u_n = 0$.

Cas $q = 1$

- $u_n = u_0$ pour tout n : suite constante.
- $\lim u_n = u_0$.

Cas $q > 1$

- $q^n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_0 > 0$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Cas $q \leq -1$

- La suite (q^n) n'est pas convergente (oscillations et/ou divergence).

5. Limite d'un quotient de polynômes

Soient $P(n)$ et $Q(n)$ deux polynômes en n de degrés respectifs p et q , avec $Q(n) \neq 0$ pour n assez grand.

- Si $p < q$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.
- Si $p = q$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q}$, rapport des coefficients dominants.
- Si $p > q$, alors la limite est infinie (en général $\pm\infty$).

6. Théorème des gendarmes et comparaisons

Théorème des gendarmes

- Si $\forall n, u_n \leq v_n \leq w_n$, et si $\lim u_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim v_n = \ell$.

Comparaison de limites

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.
- Si $u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.

7. Suites définies par récurrence linéaire

On considère une suite définie par :

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Cas $|a| < 1$

- Si (u_n) converge vers une limite ℓ , en passant à la limite dans la relation :

$$\ell = a\ell + b \quad \Rightarrow \quad (1 - a)\ell = b \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{b}{1 - a}.$$

- On pose souvent $v_n = u_n - \ell$, puis

$$v_{n+1} = av_n,$$

ce qui montre que (v_n) est géométrique de raison a et $v_n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell$.

Cas $|a| \geq 1$

- En général, la suite diverge (croissance ou oscillations).