

Dérivation, convexité et continuité — Quiz (20 questions)

Terminale Spécialité Mathématiques

Consignes : Pour chaque question, écrire la **réponse exacte** (simplifiée si possible).

Questions

1. Dérivée simple

On considère la fonction

$$f(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Donner l'expression de la dérivée $f'(x)$.

2. Dérivée d'un polynôme de degré 3

On considère

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Donner l'expression de $f'(x)$.

3. Dérivée d'une fonction exponentielle simple

On considère

$$h(x) = e^x - 1 - x.$$

Donner $h'(x)$.

4. Dérivée seconde d'une exponentielle

Avec la même fonction

$$h(x) = e^x - 1 - x,$$

donner $h''(x)$.

5. Dérivée d'un produit avec exponentielle

On considère

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

Donner $f'(x)$ sous la forme *non factorisée*.

6. Même dérivée, forme factorisée

Avec

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$

donner $f'(x)$ *factorisée au maximum*.

7. Signe de la dérivée

Pour

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$

sur quel intervalle f est-elle **croissante** sur $[0; +\infty[$?

8. Maximum global

Pour

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{sur } [0; +\infty[,$$

donner l'abscisse du **maximum global** de f .

9. Limite d'une fonction exponentielle pondérée

Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}.$$

10. **Dérivée d'une fonction avec logarithme**

On considère

$$g(x) = x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}.$$

Donner l'expression de $g'(x)$.

11. **Deuxième dérivée de g**

Avec

$$g(x) = x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2},$$

donner $g''(x)$.

12. **Valeur de la dérivée en 0**

Avec la même fonction g , calculer la valeur de $g'(0)$.

13. **Dérivée d'un logarithme composé**

On considère

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2.$$

Donner $f'(x)$.

14. **Signe de $f'(x)$**

Toujours avec

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2,$$

le signe de $f'(x)$ est-il positif pour $x < 0$ ou pour $x > 0$? Indiquer la réponse sous la forme « $x < 0$ » ou « $x > 0$ », par exemple.

15. **Dérivée de $p(x)$**

On considère

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

Donner l'expression de la dérivée $p'(x)$.

16. **Discriminant de $p'(x)$**

Pour

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5,$$

calculer le discriminant Δ de ce trinôme.

17. **Sens de variation de p**

Sachant que le discriminant trouvé est $\Delta < 0$, comment varie la fonction

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

sur l'intervalle $[-3; 4]$?

18. **Valeur de $p(-3)$**

Calculer $p(-3)$ pour

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

19. **Valeur de $p(4)$**

Calculer $p(4)$ pour

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

20. **Nombre de points d'inflexion**

On considère encore

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{sur } [0; +\infty[.$$

On admet que

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Combien de **points d'inflexion** la courbe représentative de f possède-t-elle sur $[0; +\infty[$?

Corrigé du quiz

1. $f'(x) = 2x - 3$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.
3. $h'(x) = e^x - 1$.
4. $h''(x) = e^x$ (la dérivée de e^x est encore e^x).
5. Par dérivation d'un produit :

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}.$$

6. En factorisant :

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}.$$

7. Comme

$$f'(x) = e^{-x}x(2 - x),$$

et $e^{-x} > 0$ pour tout x , on a $f'(x) > 0$ pour $0 < x < 2$. Donc f est **croissante** sur $[0; 2]$.

8. Sur $[0; +\infty[$, f croît sur $[0; 2]$ puis décroît ensuite, donc le maximum global est atteint en

$$x = 2.$$

9. L'exponentielle domine le polynôme, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

10. Pour

$$g(x) = x + \ln(1 + x) - \frac{x^2}{2},$$

on obtient

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1 + x} - x.$$

11. En dérivant encore :

$$g''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2} - 1,$$

qui est strictement négatif pour tout $x > -1$: g est concave sur son domaine.

12. En particulier

$$g'(0) = 1 + \frac{1}{1 + 0} - 0 = 2.$$

13. Pour

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2,$$

on obtient

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x.$$

14. On a

$$f'(x) = 2x \left(\frac{1}{x^2 + 1} - 1 \right) = 2x \left(\frac{1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2x(-x^2)}{x^2 + 1} = -\frac{2x^3}{x^2 + 1}.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-x^3$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 0$.

15. Pour

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1,$$

la dérivée est

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

16. Le discriminant de

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60 = -24 < 0.$$

17. Comme $\Delta < 0$ et le coefficient dominant $3 > 0$, on a $p'(x) > 0$ pour tout x . Donc p est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-3; 4]$.

18.

$$p(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) + 1 = -27 - 27 - 15 + 1 = -68.$$

19.

$$p(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 1 = 64 - 48 + 20 + 1 = 37.$$

20. On a

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Le trinôme $x^2 - 4x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$ et deux racines

$$x = 2 \pm \sqrt{2},$$

qui appartiennent à $[0; +\infty[$. La courbe admet donc **2 points d'inflexion** sur $[0; +\infty[$.