Dérivation, convexité et continuité — Fiche de révision

Spécialité mathématiques – Terminale

---

1) Dérivation et tangentes

- **Nombre dérivé en un point** : si f est dérivable en a,
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
- **Interprétation graphique** : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
- **Équation de la tangente en a** :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
- **Règles usuelles** (sur un intervalle) : pour des fonctions dérivables u, v et un réel k,
  - $(u+v)' = u' + v'$,
  - $(ku)' = ku'$,
  - $(uv)' = u'v + uv'$,
  - $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ si $v \neq 0$,
  - $(e^x)' = e^x$,
  - $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

---

2) Continuité et TVI (Théorème des valeurs intermédiaires)

Continuité en un point. On dit que f est continue en a si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
Sur un intervalle, f est continue si elle l'est en tout point de cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire $k \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$), il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que
$$f(c) = k.$$

Corollaire (existence et unicité de solution). Si f est
- continue sur $[a, b]$,
- et strictement monotone sur $[a, b]$ (croissante ou décroissante),

alors, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.

Schéma type (bac) pour montrer qu'une équation admet une solution unique :
1. montrer que f est continue sur $[a, b]$,
2. calculer $f(a)$ et $f(b)$, vérifier que la valeur cherchée (souvent 0) est entre $f(a)$ et $f(b)$,
3. conclure par le TVI (existence d'une solution),
4. utiliser le sens de variation (ou le signe de f') pour conclure à l'unicité.

---

3) Signe de la dérivée et variations

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f y est **croissante**.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f y est **décroissante**.
- Un point où $f'(a) = 0$ est un *point critique* :
  - maximum local si f' change de $+$ à $-$ en a,
  - minimum local si f' change de $-$ à $+$ en a,
  - ou ni l'un ni l'autre (point stationnaire).
- On résume les informations dans un **tableau de variations** : première ligne pour le signe de f', deuxième ligne pour les flèches de f.

---

4) Convexité, dérivée seconde, points d'inflexion

- Si f est deux fois dérivable sur un intervalle :
  - $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ est **convexe** (courbe en forme de bol),
  - $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ est **concave** (courbe en forme de cloche).
- Un **point d'inflexion** est un point où la courbe change de convexité (le signe de f'' change).
- En pratique :
  1. on résout $f''(x) = 0$,
  2. on étudie le signe de f'' de part et d'autre des solutions,
  3. s'il y a changement de signe, alors le point correspondant est un point d'inflexion.
- Convexité et tangentes :
  - si f est convexe, alors pour tout a, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$: la courbe est au-dessus de ses tangentes ;
  - si f est concave, la courbe est en dessous de ses tangentes.

---

5) Inégalités classiques via la convexité

Exponentielle

On considère $h(x) = e^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}$.

- $h'(x) = e^x - 1$, $h''(x) = e^x > 0$: h est convexe sur $\mathbb{R}$.
- En 0, $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.
- La tangente en 0 a pour équation $y = 0$. Par convexité, $h(x) \geq 0$ pour tout x.

On obtient l'inégalité fondamentale :

$$\boxed{e^x \geq 1 + x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Logarithme

Un exemple typique : montrer que pour $x > 0$,

$$\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

On introduit

$$g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

On calcule $g'(x)$ et $g''(x)$ et on montre que g est convexe, avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. La convexité implique alors $g(x) \geq 0$, d'où l'inégalité cherchée.

---

6) Stratégies bac à retenir

- **Étude complète de fonction** :
  - domaine de définition,
  - limites (aux bornes de l'intervalle, en $\pm\infty$, aux points de non-définition),
  - dérivée, signe de la dérivée, variations, extremums,
  - dérivée seconde, convexité, points d'inflexion,
  - asymptotes (horizontales, verticales, obliques) si besoin.
- **Résolution d'équation de type** $f(x) = k$: continuité + TVI pour l'existence, sens de variation pour l'unicité, puis encadrement numérique avec un tableau de valeurs.
- **Inégalités** : construire une fonction $F(x)$ telle que l'inégalité soit équivalente à $F(x) \geq 0$, puis utiliser :
  - convexité / concavité,
  - étude d'une tangente particulière,
  - ou une étude de variations classique.