

Fiche d'exercices

Dérivation, convexité et continuité

Terminale Spécialité

Partie A — Exercices

Exercice 1 — Continuité et dérivabilité en un point

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 1$.
2. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.
3. La fonction f est-elle continue en 1 ?
4. Calculer, si elle existe, la dérivée $f'(1)$ à l'aide de la définition

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

5. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 si elle existe.

Exercice 2 — Étude de fonctions, variations et extremums

On considère la fonction

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$$

définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Mettre $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = (2x - 3 + x^2 - 3x + 1)e^x$ puis factoriser au maximum.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations.
5. Déterminer les extremums éventuels de f (valeurs et abscisses).

Exercice 3 — Convexité et dérivée seconde

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2.$$

1. Justifier que f est dérivable, puis calculer $f'(x)$.
2. Montrer que

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x.$$

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de f .

3. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
4. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité / concavité de f .
5. Déterminer s'il existe un point d'inflexion et, le cas échéant, en donner les coordonnées.

Exercice 4 — Convexité et inégalités

On considère la fonction g définie sur $(0, +\infty)$ par

$$g(x) = x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}.$$

1. Déterminer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
2. Étudier le signe de $g''(x)$ et en déduire la convexité ou concavité de g sur $(0, +\infty)$.
3. Montrer que $g(0) = 0$ (par prolongement par continuité) et que $g'(0) = 2$.
4. En étudiant les variations de g , déterminer l'intervalle sur lequel on a $g(x) \geq 0$.
5. En déduire pour quels $x > 0$ l'inégalité

$$\ln(1+x) \geq \frac{x^2}{2} - x$$

est vérifiée.

Exercice 5 — Inégalité classique avec la convexité de l'exponentielle

On considère la fonction $h(x) = e^x - 1 - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$.
2. Étudier le signe de $h''(x)$ et en déduire la convexité de h .
3. Calculer $h(0)$ et $h'(0)$.
4. En utilisant la convexité de h et le fait que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Exercice 6 — Sujet type bac, continuité, variations et équation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, 2]$. On notera α la solution appartenant à $[0, 1]$.
4. À l'aide du tableau de variations, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
5. Calculer $f''(x)$. La courbe de f possède-t-elle des points d'inflexion ? Justifier.

Exercice 7 — Étude complète d'une fonction avec exponentielle

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = e^{-x} x(2 - x).$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.
4. Déterminer les extremums de f sur $[0, +\infty[$ (abscisses et valeurs).
5. Calculer $f''(x)$, montrer que

$$f''(x) = e^{-x} (x^2 - 4x + 2),$$

puis étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité / concavité de f ainsi que les éventuels points d'inflexion.

Exercice 8 — Continuité de fonctions définies par morceaux

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2, \\ 3 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[, \\ a & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

soit continue en 0 ?

Exercice 9 — Type bac : exponentielle et points d'inflexion

Exercice 2 (7 points)

Thème : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
(b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.

(a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
(b) On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3},$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant cette expression de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Partie B — Corrigés (détaillés)

Exercice 1

Correction.

Pour $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Donc pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 1$.

Limite en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Continuité en 1 : on a $f(1) = 2$ par définition, et la limite en 1 vaut 2, donc f est continue en 1.

Dérivabilité en 1 :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Tangente en 1 : coefficient directeur $f'(1) = 1$, point $A(1, 2)$. Équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1(x - 1) + 2 = x + 1.$$

La tangente est confondue avec la droite $y = x + 1$, ce qui est logique puisque pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 1$.

Exercice 2

Correction.

f est produit d'un polynôme et de e^x , donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2 - 3x + 1$. Alors $f(x) = u(x)e^x$.

$$f'(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2).$$

On factorise :

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1),$$

donc

$$f'(x) = e^x(x - 2)(x + 1).$$

Comme $e^x > 0$ pour tout x , le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 2)(x + 1)$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$0 +$

Donc :

- f croissante sur $(-\infty, -1]$,
- décroissante sur $[-1, 2]$,
- croissante sur $[2, +\infty)$.

On calcule :

$$f(-1) = ((-1)^2 + 3 + 1)e^{-1} = 5e^{-1}, \quad f(2) = (4 - 6 + 1)e^2 = -e^2.$$

Ainsi :

- f admet un **maximum local** en -1 : $f(-1) = 5/e$,
- un **minimum local** en 2 : $f(2) = -e^2$.

Exercice 3

Correction.

On a

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc $\ln(x^2 + 1)$ est définie et dérivable. La différence de deux fonctions dérivables est dérivable : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Dérivée.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x.$$

2) Signe de $f'(x)$ et variations.

On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x = \frac{2x - 2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{-2x^3}{x^2 + 1}.$$

Le dénominateur est toujours > 0 et $-2x^3$ a le signe opposé à celui de x^3 .

Ainsi :

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 0, \quad f'(x) < 0 \text{ si } x > 0, \quad f'(0) = 0.$$

Donc f est

— **croissante** sur $(-\infty, 0]$,

— **décroissante** sur $[0, +\infty)$,

et admet un **maximum** en $x = 0$ de valeur

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0.$$

3) Dérivée seconde.

On dérive encore :

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' - 2.$$

En utilisant la dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - (2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Donc

$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} - 2 = \frac{2 - 2x^2 - 2(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Après simplification, on obtient une forme plus simple :

$$f''(x) = \frac{-2x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

4) Signe de $f''(x)$ et convexité.

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est toujours > 0 . Le numérateur $-2x^2(x^2 + 3)$ est ≤ 0 pour tout x , car $x^2 \geq 0$ et $x^2 + 3 > 0$.

Ainsi :

$$f''(x) \leq 0 \text{ pour tout } x, \quad f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

Donc la fonction f est **concave sur toute** $\mathbb{R}$.

5) Point d'inflexion.

Un point d'inflexion nécessite un changement de signe de f'' . Or $f''(x) \leq 0$ pour tout x , il n'y a pas de changement de signe (même si $f''(0) = 0$).

Conclusion : **il n'y a pas de point d'inflexion** pour la fonction f .

Exercice 4

Correction.

On considère

$$g(x) = x + \ln(1 + x) - \frac{x^2}{2}, \quad x > 0.$$

1) Dérivées.

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} - x, \quad g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 1.$$

2) Concavité.

Pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 1 < 0.$$

Donc g est **concave** sur $(0, +\infty)$.

3) Valeurs en 0.

On prolonge g par continuité en 0 :

$$g(0) = 0 + \ln(1) - 0 = 0.$$

Et

$$g'(0) = 1 + \frac{1}{1+0} - 0 = 2.$$

4) Étude des variations et signe de g .

On résout $g'(x) = 0$:

$$1 + \frac{1}{1+x} - x = 0 \iff (1+x) + 1 - x(1+x) = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Les solutions sont $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Sur $(0, +\infty)$, le seul point critique est

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41.$$

Comme $g''(x) < 0$, g a un **maximum** en x_1 . On a :

$$g(0) = 0, \quad g(x_1) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

(car le terme $-x^2/2$ domine).

Donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ avec $\alpha > x_1$. On trouve numériquement $\alpha \approx 2,93$.

Ainsi :

$$g(x) \geq 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \alpha, \quad g(x) < 0 \text{ pour } x > \alpha.$$

5) Inégalité sur $\ln(1+x)$.

On a, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} \geq 0 \iff \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{2} - x,$$

mais cette inégalité n'est vraie que pour

$$0 \leq x \leq \alpha \approx 2,93.$$

Conclusion :

$$\ln(1+x) \geq \frac{x^2}{2} - x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \alpha \approx 2,93.$$

Exercice 5

Correction.

$$h(x) = e^x - 1 - x.$$

1) Dérivées.

$$h'(x) = e^x - 1, \quad h''(x) = e^x.$$

2) Convexité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = e^x > 0$, donc h est **convexe** sur $\mathbb{R}$.

3) Valeurs en 0.

$$h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0, \quad h'(0) = e^0 - 1 = 0.$$

4) Inégalité.

Pour une fonction convexe, le graphe est au-dessus de toutes ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation :

$$y = h(0) + h'(0)x = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) \geq 0 \iff e^x - 1 - x \geq 0 \iff e^x \geq 1 + x.$$

On obtient l'inégalité classique

$$\boxed{e^x \geq 1 + x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 6

Correction.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Dérivée.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

2) Signe de $f'(x)$ et variations.

- $f'(x) > 0$ si $x < -1$ ou $x > 1$,
- $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$,
- $f'(-1) = f'(1) = 0$.

Donc f est :

- croissante sur $(-\infty, -1]$,
- décroissante sur $[-1, 1]$,
- croissante sur $[1, +\infty)$.

Valeurs aux points particuliers :

$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3, \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1.$$

3) Solutions de $f(x) = 0$ dans $[0, 2]$.

On étudie le signe de f :

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0, \quad f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires :

- Comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, il existe une solution $\alpha \in (0, 1)$.
- Comme $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, il existe une autre solution $\beta \in (1, 2)$.

Remarque : l'énoncé parlant d'«une unique solution dans $[0, 2]$ » n'est pas exact : en réalité, il y a **deux** solutions dans cet intervalle, une dans $(0, 1)$ et une dans $(1, 2)$. On note α la solution dans $[0, 1]$.

4) Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

On cherche un encadrement dans $[0, 1]$. On calcule :

$$f(0,3) = 0,3^3 - 3 \cdot 0,3 + 1 = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0,$$

$$f(0,4) = 0,4^3 - 3 \cdot 0,4 + 1 = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0.$$

Donc $\alpha \in (0,3, 0,4)$. On a ainsi un encadrement de longueur 0,1 :

$$\boxed{0,3 < \alpha < 0,4.}$$

5) Dérivée seconde et point d'inflexion.

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

On a :

$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 0, \quad f''(0) = 0, \quad f''(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

La concavité change de signe en $x = 0$, donc la courbe admet un **point d'inflexion** à l'abscisse 0. On a $f(0) = 1$, donc le point d'inflexion est

$$I(0, 1).$$

Exercice 7

Correction.

On considère

$$f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

1) Continuité, dérivabilité et dérivée.

x^2 est un polynôme, e^{-x} est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc leur produit est dérivable (et donc continu) sur $[0, +\infty[$.

En dérivant :

$$f'(x) = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2).$$

2) Mise sous forme factorisée.

Pour tout $x \geq 0$,

$$2x - x^2 = x(2 - x),$$

d'où

$$f'(x) = e^{-x}x(2 - x).$$

3) Signe de $f'(x)$ et variations.

Sur $[0, +\infty[$, $e^{-x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x(2 - x)$.

- Si $0 < x < 2$, alors $x > 0$ et $2 - x > 0$: $f'(x) > 0$.
- Si $x > 2$, alors $x > 0$ et $2 - x < 0$: $f'(x) < 0$.
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = 0$.

Ainsi, f est

- croissante sur $[0, 2]$,
- décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 4e^{-2}.$$

4) Extremums.

- En $x = 0$, f passe de «non définie à gauche» à croissante avec $f(0) = 0$: c'est un **minimum global** sur $[0, +\infty[$.
- En $x = 2$, f passe de croissante à décroissante : c'est un **maximum global** sur $[0, +\infty[$, de valeur $4e^{-2}$.

5) Dérivée seconde, convexité et points d'inflexion.

On dérive encore :

$$f''(x) = (e^{-x}x(2 - x))' = e^{-x}x(2 - x)' + (e^{-x})'x(2 - x) = e^{-x}(2 - 2x) - e^{-x}x(2 - x).$$

Après simplification, on obtient :

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme

$$x^2 - 4x + 2.$$

Son discriminant vaut $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$ et ses racines sont

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Donc :

- $f''(x) > 0$ pour $x < 2 - \sqrt{2}$ ou $x > 2 + \sqrt{2}$,
- $f''(x) < 0$ pour $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

En tenant compte de $x \geq 0$:

- f est **convexe** sur $[0, 2 - \sqrt{2}[$ et sur $]2 + \sqrt{2}, +\infty[$,
- f est **concave** sur $]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[$.

Comme le signe de f'' change en $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et en $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, il y a deux **points d'inflexion** :

$$I_1(2 - \sqrt{2}, (2 - \sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}), \quad I_2(2 + \sqrt{2}, (2 + \sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}).$$

Exercice 8

Correction.

1) Continuité et dérivabilité de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Pour $x < 0$, $f(x) = x^2 - 1$: polynôme, donc continue et dérivable. Pour $x > 0$, $f(x) = x - 1$: polynôme, donc continue et dérivable.

Le point délicat est $x = 0$.

Continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1,$$

et $f(0) = 0 - 1 = -1$. Les trois coïncident, donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0. Pour $x < 0$, $f'(x) = 2x$ donc $f'(0^-) = 0$. Pour $x > 0$, $f'(x) = 1$ donc $f'(0^+) = 1$. Les dérivées à gauche et à droite sont différentes : f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mais pas dérivable en 0.

2) Continuité de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2, \\ 3 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Pour $x \neq 2$, on factorise :

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1.$$

Donc $f(x) = x + 1$ pour $x \neq 2$, fonction polynomiale continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

En $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3, \quad f(2) = 3.$$

La limite en 2 est égale à la valeur de la fonction : f est continue en 2.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Choix de a pour la continuité en 0.

On considère

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[, \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction sera continue en 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = a.$$

On rationalise :

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Il faut donc choisir

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

pour que la fonction soit continue en 0.

Exercice 9

Correction.

Partie A

1. La fonction p est un polynôme, donc continue et dérivable sur $[-3; 4]$.

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1, \quad p'(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

On étudie le signe de $p'(x)$. C'est un trinôme de discriminant

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60 = -24 < 0,$$

et le coefficient directeur est positif ($3 > 0$).

Donc $p'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, en particulier, sur $[-3; 4]$. La fonction p est donc **strictement croissante** sur $[-3; 4]$.

2. On calcule les valeurs aux bornes :

$$p(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) + 1 = -27 - 27 - 15 + 1 = -68,$$

$$p(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 1 = 64 - 48 + 20 + 1 = 37.$$

Comme p est continue et strictement croissante sur $[-3; 4]$, elle réalise une bijection de $[-3; 4]$ sur $[-68; 37]$. Or $0 \in [-68; 37]$.

Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet donc une **unique** solution α dans $[-3; 4]$.

3. On cherche α au dixième près. Par exemple, à la calculatrice, on trouve

$$\alpha \approx -0,2.$$

On peut justifier rapidement : $p(-0,3) \approx -1,5 < 0$ et $p(-0,1) \approx 0,5 > 0$, donc $\alpha \in (-0,3; -0,1)$, ce qui est cohérent avec $\alpha \approx -0,2$.

4. Comme p est strictement croissante, elle est négative avant la racine et positive après. Avec $\alpha \approx -0,2$, on obtient le tableau de signes :

Donc $p(x) < 0$ sur $[-3; \alpha[$ et $p(x) > 0$ sur $] \alpha; 4]$.

Partie B

1. (a) La fonction f est quotient de fonctions dérivables avec dénominateur jamais nul sur $[-3; 4]$ ($1 + x^2 > 0$), donc elle est dérivable.

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}.$$

En utilisant la formule du quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + x^2) - e^x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 + x^2 - 2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(1 + x^2)^2}.$$

- (b) Pour une tangente horizontale il faut $f'(x_0) = 0$.

Le dénominateur $(1 + x^2)^2$ est toujours > 0 et $e^x > 0$, donc

$$f'(x) = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

On a alors

$$f(1) = \frac{e^1}{1 + 1^2} = \frac{e}{2}.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale d'équation

$$y = \frac{e}{2}.$$

2. (a) D'après le graphique, on observe que le profil :

- est **convexe** sur une première partie (à gauche),
- puis **concave** sur une zone intermédiaire,

— puis de nouveau **convexe** sur la partie droite.

La courbe semble donc avoir **deux changements de convexité**, donc deux points d'inflexion environ aux abscisses $x \approx 0$ et $x \approx 1$. Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

(b) On admet que, pour tout $x \in [-3; 4]$,

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3},$$

où p est la fonction de la partie A.

Pour les signes, on remarque :

$$(1+x^2)^3 > 0 \quad \text{et} \quad e^x > 0 \quad \text{pour tout } x.$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $p(x)(x-1)$.

D'après la partie A, $p(x) < 0$ sur $[-3; \alpha[$, $p(\alpha) = 0$ et $p(x) > 0$ sur $]\alpha; 4]$, avec $\alpha \approx -0,2$.

On construit alors le tableau de signe détaillé :

On peut résumer le **tableau de signe de f''** seul ainsi :

On en déduit :

- Pour $-3 < x < \alpha$, $f''(x) > 0$: f est **convexe**.
- Pour $\alpha < x < 1$, $f''(x) < 0$: f est **concave**.
- Pour $1 < x < 4$, $f''(x) > 0$: f est à nouveau **convexe**.

Il y a donc un changement de convexité en $x = \alpha$ (de convexe à concave) puis en $x = 1$ (de concave à convexe).

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet **deux points d'inflexion**, d'abscisses α et 1. Le toboggan possède donc bien au moins deux points d'inflexion : il **assure de bonnes sensations**.