

Dérivation, convexité et continuité

Spécialité mathématiques – Terminale

1 Nombre dérivé et tangente

Définition. Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si la limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est un réel. Ce réel est le *nombre dérivé* de f en a .

Remarque.

Le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le *taux de variation* de f entre a et x . Le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite de ces taux de variation lorsque x se rapproche de a .

Propriété. Interprétation géométrique

Si f est dérivable en a , alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une *tangente* de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation de cette tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple.

Pour $f(x) = x^2$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a.$$

Quand $x \rightarrow a$, $x + a \rightarrow 2a$. Donc $f'(a) = 2a$. Au point $a = 1$, $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$. La tangente en $x = 1$ a pour équation

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

2 Dérivabilité, variations et extremums

Propriété. Lien dérivée / variations

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I .

Remarque. Extremums locaux

On appelle *point critique* tout réel a tel que $f'(a) = 0$ ou f' n'est pas définie en a . Si f est dérivable au voisinage de a :

- si f' change de signe de $+$ à $-$ en a , f admet un *maximum local* en a ;
- si f' change de signe de $-$ à $+$ en a , f admet un *minimum local* en a .

3 Convexité et dérivée seconde

Définition. Convexité / concavité

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite

- *convexe* sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y);$$

- *concave* si l'inégalité est inversée.

Propriété. Lien avec la dérivée seconde

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I .
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I .

Remarque. Tangentes et convexité

Si f est convexe sur I , alors sa courbe est « au-dessus » de ses tangentes :

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

pour tout $x \in I$. Si f est concave, la courbe est « en dessous » de ses tangentes.

Exemple.

Pour $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2 > 0$ pour tout x . La fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

4 Continuité et dérivabilité

Définition. Continuité en un point

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Propriété. Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . Autrement dit, la dérivabilité implique toujours la continuité.

Remarque.

La réciproque est fausse : il existe des fonctions continues non dérivables en un point (par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable).