

Nombres complexes — applications

Terminale Maths expertes

Exercice 1 — Puissances complexes — De Moivre

On considère

$$z = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. Écrire z sous formes trigonométrique et exponentielle.
2. Calculer z^6 puis z^{15} sans développement.
3. Déterminer tous les entiers $n \geq 1$ tels que z^n soit réel.
4. Parmi eux, préciser ceux pour lesquels z^n est réel strictement positif.

Exercice 2 — Choisir la forme adaptée — quotient et puissance

On pose

$$w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

1. Écrire le numérateur et le dénominateur sous forme exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de w .
3. Calculer w^6 puis w^{12} .
4. Retrouver la forme algébrique de w .

Exercice 3 — Formules d'Euler — linéariser $\cos^4$

On utilise

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

1. Montrer que $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$.
2. En déduire une expression linéarisée de $\cos^4 \theta$.
3. Établir de même une expression de $\sin^4 \theta$.
4. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$.

Exercice 4 — Exponentielle imaginaire — formules d'addition

On part de

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}.$$

1. Développer le membre de droite à l'aide de $e^{it} = \cos t + i \sin t$.
2. Retrouver $\cos(\alpha + \beta)$.
3. Retrouver $\sin(\alpha + \beta)$.
4. En déduire $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

Exercice 5 — Racines quatrièmes d'un complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^4 = -16.$$

1. Écrire -16 sous forme exponentielle.
2. Déterminer les quatre solutions sous forme exponentielle.
3. Les écrire sous forme algébrique.
4. Décrire la configuration géométrique de leurs images et calculer la longueur d'un côté.

Exercice 6 — Racines cinquièmes d'un nombre complexe

Résoudre

$$z^5 = 32i.$$

1. Écrire $32i$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer les cinq solutions.
3. Décrire géométriquement leurs images.
4. Calculer la somme des cinq solutions.

Exercice 7 — Formule générale des racines n -ièmes

Soit

$$a = re^{i\varphi}, \quad r > 0, \quad n \geq 2.$$

On cherche les solutions de $z^n = a$.

1. Montrer que toute solution a pour module $r^{1/n}$.
2. Déterminer tous ses arguments.
3. Établir la formule générale des n solutions.
4. Appliquer au cas $z^7 = 128$.

Exercice 8 — Racines n -ièmes de l'unité — démonstration

On note

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, \quad n \geq 2.$$

1. Montrer que toute racine appartient au cercle unité.
2. Déterminer exactement l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
3. Montrer que la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.
4. Pour $n = 8$, compter les racines dont la partie réelle est strictement positive.

Exercice 9 — Hexagone régulier et racines de l'unité

On pose

$$\omega = e^{i\pi/3}$$

et A_k est le point d'affixe ω^k , $k = 0, \dots, 5$.

1. Montrer que les A_k forment un hexagone régulier.
2. Calculer A_0A_1 .
3. Calculer A_0A_2 .
4. Calculer A_0A_3 et interpréter.

Exercice 10 — Pentagone régulier — valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

On pose

$$\zeta = e^{2i\pi/5}.$$

1. Montrer que $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$.
2. En divisant par ζ^2 , obtenir une équation vérifiée par $x = \zeta + \zeta^{-1}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 11 — Décagone régulier — cordes du cercle unité

Les points A_k , $k = 0, \dots, 9$, ont pour affixes

$$z_k = e^{ik\pi/5}.$$

1. Justifier que les A_k forment un décagone régulier.
2. Calculer la longueur A_0A_1 .
3. Calculer la longueur A_0A_2 .
4. Calculer la longueur A_0A_5 .

Exercice 12 — Construire un triangle équilatéral par quotient d'affixes

On considère

$$z_A = 1 - i, \quad z_B = 4 + i,$$

et on définit C par

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\pi/3}.$$

1. Interpréter le module de cette relation.
2. Interpréter son argument.
3. Calculer z_C sous forme algébrique.
4. Déterminer l'afixe de l'autre sommet C' donnant un triangle équilatéral construit sur $[AB]$.

Exercice 13 — Construire un carré par multiplication par i

On considère

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 4 + 2i.$$

Le point D est défini par

$$z_D - z_A = i(z_B - z_A).$$

1. Calculer z_D .
2. Déterminer l'afixe z_C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Montrer que $ABCD$ est un carré.
4. Déterminer l'afixe de son centre et le rayon de son cercle circonscrit.

Exercice 14 — Quotient d'affixes — triangle remarquable

On prend

$$z_A = 0, \quad z_B = 1, \quad z_C = 1 + i\sqrt{3}.$$

1. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme exponentielle.
2. En déduire AC/AB et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Calculer BC et déterminer la nature exacte du triangle.
4. Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 15 — Lieu géométrique — cercle d'Apollonius

Déterminer l'ensemble des points M d'afixe $z = x + iy$ tels que

$$|z + 1| = 2|z - 1|.$$

1. Interpréter géométriquement la condition.
2. Élever au carré et obtenir une équation en x, y .
3. Mettre cette équation sous forme canonique.
4. Préciser le centre et le rayon du lieu.

Exercice 16 — Lieu par argument — cercle de diamètre

On fixe

$$z_A = -1, \quad z_B = 1.$$

On cherche $M \neq A, B$ d'affixe z tel que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

1. Interpréter l'argument du quotient.
2. Traduire la condition en termes d'orthogonalité.
3. Identifier le lieu géométrique.
4. Donner son équation cartésienne.

Exercice 17 — Module + argument — déterminer un point unique

Déterminer $z \neq -1$ vérifiant simultanément

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

1. Déterminer la valeur exacte du quotient $\frac{z-1}{z+1}$.
2. Résoudre alors l'équation complexe obtenue.
3. Donner z sous forme algébrique.
4. Vérifier directement les deux conditions initiales.

Exercice 18 — Suite complexe périodique

On définit

$$z_0 = 2, \quad z_{n+1} = iz_n + (1-i).$$

1. Déterminer le point fixe L de la relation.
2. Poser $w_n = z_n - L$ et établir une relation simple sur w_n .
3. Donner une expression explicite de z_n .
4. Décrire géométriquement la suite des points M_n d'affixe z_n .

Exercice 19 — Suite complexe en spirale

On définit $z_0 = 3 + i$ par

$$z_{n+1} - (1+i) = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}(z_n - (1+i)).$$

1. Poser $w_n = z_n - (1+i)$ et exprimer w_n .
2. En déduire une formule explicite pour z_n .
3. Calculer la distance du point M_n au point L d'affixe $1+i$.
4. Décrire la trajectoire et déterminer la limite de z_n .

Exercice 20 — Inégalité triangulaire — démonstration et cas d'égalité

Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z||w|$.
2. En déduire $|z+w| \leq |z| + |w|$.
3. Caractériser précisément le cas d'égalité lorsque $z, w \neq 0$.
4. Pour $x \in [-1, 1]$, calculer $|x-1| + |x+1|$.

Exercice 21 — Fourier discrète — application des racines de l'unité

On pose

$$\omega = e^{-2i\pi/4} = -i$$

et, pour le signal $x = (1, 0, -1, 0)$, on définit

$$X_k = \sum_{j=0}^3 x_j \omega^{jk}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

1. Montrer que $X_k = 1 - \omega^{2k}$.
2. Calculer X_0, X_1, X_2, X_3 .
3. Écrire le vecteur transformé X .
4. Expliquer le rôle des racines quatrièmes de l'unité dans ce calcul.

Exercice 22 — Ensemble de Mandelbrot — étude expérimentale

Pour un paramètre $c \in \mathbb{C}$, on définit

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

1. Pour $c = -1$, calculer les six premiers termes et conclure sur le caractère borné.
2. Pour $c = 1$, calculer les premiers termes et montrer que la suite devient rapidement non bornée.
3. Pour $c = i$, calculer z_1, z_2, z_3, z_4 .
4. À partir de ces observations, quels paramètres parmi $-1, 1, i$ semblent appartenir à l'ensemble de Mandelbrot ?

Exercice 23 — Équation $z^8 = 16$ — sélectionner les racines

Résoudre

$$z^8 = 16.$$

1. Déterminer les huit solutions sous forme exponentielle.
2. Combien ont une partie réelle strictement positive ?
3. Déterminer les solutions imaginaires pures.
4. Déterminer les solutions réelles.

Exercice 24 — Puissances — réel, positif, négatif ou imaginaire pur

On considère

$$z = \sqrt{3} + i.$$

1. Déterminer les $n \geq 1$ tels que z^n soit réel.
2. Déterminer les $n \geq 1$ tels que z^n soit réel strictement positif.
3. Déterminer les $n \geq 1$ tels que z^n soit imaginaire pur non nul.
4. Déterminer les $n \geq 1$ tels que z^n soit réel strictement négatif.

Exercice 25 — Type APMEP — conjugaison, rotation et triangle

On considère

$$z_A = -\sqrt{3} + i, \quad z_{A_1} = \overline{z_A}.$$

Le point B est l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$.

1. Écrire z_A et z_{A_1} sous forme exponentielle.
2. Déterminer z_B sous forme exponentielle puis algébrique.
3. Montrer que $OA = OB$ et que $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.
4. En déduire la nature de OAB et son aire.

Exercice 26 — Rotation et orbite — dodécagone régulier

On considère la transformation

$$F : z \longmapsto e^{-i\pi/6} z$$

et le point A d'affixe $2e^{i5\pi/6}$.

1. Interpréter géométriquement F .
2. Calculer l'affixe de $A' = F(A)$.
3. Déterminer F^{12} .
4. Décrire l'orbite $A, F(A), \dots, F^{11}(A)$.

Exercice 27 — Synthèse — équation complexe et carré

On résout

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

On note A, B, C, D les points d'affixes

$$z_A = 2 + 3i, \quad z_B = 2 - 3i, \quad z_C = 5, \quad z_D = -1.$$

1. Résoudre l'équation du second degré.
2. Montrer que A, B, C, D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et interpréter.
4. Montrer que, dans l'ordre C, A, D, B , les quatre points forment un carré.

Exercice 28 — Aire d'un polygone régulier par les complexes

Les sommets A_k d'un polygone régulier à n côtés ont pour affixes

$$z_k = Re^{i(\alpha + 2k\pi/n)}.$$

1. Montrer que $A_k A_{k+1} = 2R \sin(\pi/n)$.
2. Calculer l'aire du triangle $OA_k A_{k+1}$.
3. En déduire l'aire du polygone régulier.
4. Appliquer à un hexagone régulier de rayon $R = 2$.

Exercice 29 — Sommes trigonométriques par les racines de l'unité

Pour $n \geq 3$, on pose

$$\omega = e^{2i\pi/n}.$$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k\pi/n) = 0$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k\pi/n) = 0$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(2k\pi/n)$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(2k\pi/n)$.

Exercice 30 — Produit des cordes — synthèse experte

On pose

$$\omega = e^{2i\pi/n}, \quad n \geq 2.$$

Les racines n -ièmes de l'unité sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$.

1. Montrer que

$$1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k).$$

2. En évaluant en $X = 1$, montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

3. En prenant les modules, établir

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

4. En déduire $\prod_{k=1}^4 \sin(k\pi/5)$.