

Nombres complexes — point de vue algébrique

Terminale Maths expertes

Exercice 1 — Calcul algébrique structuré

On pose

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

1. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.
2. Calculer $A = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$ et vérifier que $A = z_1^2 - z_2^2$.
3. Calculer $B = \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 - z_2}$.
4. Écrire $C = \frac{3 + 2i}{1 - 2i}$ sous forme algébrique.

Exercice 2 — Puissances de i et évaluation rapide

On rappelle que

$$i^4 = 1.$$

1. Calculer i^{2026} , i^{2027} et i^{2028} .
2. Calculer $S = i^{2025} + i^{2026} + i^{2027} + i^{2028}$.
3. Pour $P(X) = X^{12} - 3X^7 + 2X^3 - 5$, calculer $P(i)$.
4. Déterminer i^n selon le reste de n dans la division par 4.

Exercice 3 — Conjugaison — démonstrations du programme

Soient $z, w \in \mathbb{C}$, avec $w \neq 0$.

1. Démontrer que $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
2. Démontrer que $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
4. Application : simplifier $\overline{(2 - 3i)^5}$ sans développer $(2 - 3i)^5$.

Exercice 4 — Inverse d'un complexe — formule générale

Soit $z = a + ib \neq 0$.

1. Montrer que $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
2. En déduire une expression de $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique.
3. Calculer $\frac{1}{2-i} - \frac{1}{1+2i}$.
4. Résoudre $\frac{1}{z} = 2 - i$.

Exercice 5 — Binôme de Newton dans $\mathbb{C}$

On considère

$$A = (1 + 2i)^6.$$

1. Développer A à l'aide de la formule du binôme.
2. En déduire $(1 - 2i)^6$ sans refaire le calcul.
3. Calculer $(1 + 2i)^6 + (1 - 2i)^6$.

4. Calculer $\frac{(1+2i)^6 - (1-2i)^6}{2i}$.

Exercice 6 — Équation linéaire $az = b$

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$(3-2i)z = 7+i.$$

1. Isoler z .
2. Rationaliser le quotient.
3. Donner la solution sous forme algébrique.
4. Vérifier directement la solution.

Exercice 7 — Reconstituer un complexe avec $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ sachant que

$$z + \bar{z} = 10, \quad z - \bar{z} = -6i.$$

1. Poser $z = x + iy$.
2. Exprimer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
3. Déterminer x et y .
4. Donner z puis vérifier.

Exercice 8 — Équation couplée en z et $\bar{z}$

Résoudre

$$(2+i)z + (1-i)\bar{z} = 7+5i.$$

1. Poser $z = x + iy$.
2. Montrer que le membre de gauche vaut $(3x-2y) + iy$.
3. Résoudre le système réel obtenu.
4. Donner la solution complexe et la vérifier.

Exercice 9 — Quand un quotient est-il réel ou imaginaire pur ?

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$Z_x = \frac{x+i}{1+xi}.$$

Le dénominateur n'est jamais nul pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire Z_x sous forme algébrique.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles Z_x est réel.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles Z_x est imaginaire pur.
4. Résoudre $Z_x = 1$ puis $Z_x = -1$.

Exercice 10 — Paramètre réel — nombre de solutions

Pour $m \in \mathbb{R}$, résoudre

$$z + m\bar{z} = (1+m) + (1-m)i.$$

1. Poser $z = x + iy$ et obtenir un système réel.
2. Résoudre lorsque $m \neq \pm 1$.
3. Étudier le cas $m = 1$.
4. Étudier le cas $m = -1$ et dresser le bilan.

Exercice 11 — Racines carrées d'un complexe

Résoudre

$$z^2 = 11 + 60i.$$

1. Poser $z = x + iy$ et établir deux équations réelles.
2. Montrer que $x^2 + y^2 = 61$.
3. Déterminer x^2 , y^2 et le signe de xy .
4. Donner les deux solutions.

Exercice 12 — Second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

1. Calculer le discriminant.
2. Déterminer ses racines carrées dans $\mathbb{C}$.
3. Résoudre l'équation.
4. Factoriser le trinôme sur $\mathbb{C}$.

Exercice 13 — Second degré à coefficients complexes

Résoudre

$$z^2 - (1 + 2i)z + (1 + 7i) = 0.$$

1. Calculer le discriminant Δ .
2. Vérifier que $(3 - 4i)^2 = \Delta$.
3. Résoudre l'équation.
4. Vérifier la somme et le produit des deux solutions.

Exercice 14 — Degré 3 — racine réelle connue

On considère

$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15.$$

1. Vérifier que 3 est une racine.
2. Factoriser P par $z - 3$.
3. Résoudre le facteur du second degré.
4. Donner toutes les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice 15 — Polynôme réel — racine complexe connue

Soit

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + z + 5.$$

On sait que $2 + i$ est une racine.

1. Justifier que $2 - i$ est également une racine.
2. Former le facteur réel de degré 2 associé.
3. Déterminer la troisième racine.
4. Factoriser complètement P sur $\mathbb{C}$.

Exercice 16 — Identifier les coefficients d'une factorisation

On considère

$$P(z) = z^3 - z^2 + z - 6.$$

On souhaite écrire

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que 2 est une racine de P .
2. Développer $(z - 2)(z^2 + az + b)$.
3. Identifier les coefficients et déterminer a, b .
4. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17 — Factorisation de $z^n - a^n$ — application à $z^6 = 64$

On veut résoudre sans utiliser la forme exponentielle

$$z^6 = 64.$$

1. Montrer que $z^6 - 64 = (z^3 - 8)(z^3 + 8)$.
2. Factoriser $z^3 - 8$ puis résoudre $z^3 = 8$.
3. Factoriser $z^3 + 8$ puis résoudre $z^3 = -8$.
4. Donner les six solutions distinctes.

Exercice 18 — Nombre maximal de racines d'un polynôme

On considère des polynômes à coefficients réels et leurs racines éventuelles dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'un polynôme non nul de degré 1 a au plus une racine.
2. En utilisant la factorisation par $z - a$, montrer qu'un polynôme non nul de degré n a au plus n racines.
3. On sait qu'un polynôme Q de degré au plus 2 vérifie $Q(0) = Q(1) = Q(2) = 0$. Que peut-on conclure ?
4. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ sachant que $az^2 + bz + c$ s'annule pour $z = -1, 0, 2$.

Exercice 19 — Formules de Viète — sommes symétriques

Soient z_1, z_2 les racines de

$$z^2 - 8z + 20 = 0.$$

1. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sans résoudre l'équation.
2. Calculer $z_1^2 + z_2^2$.
3. Calculer $z_1^3 + z_2^3$.
4. Calculer $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ puis $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

Exercice 20 — Construire l'équation vérifiée par les carrés des racines

Soient z_1, z_2 les racines de

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

On pose $w_1 = z_1^2$ et $w_2 = z_2^2$.

1. Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
2. Calculer $w_1 + w_2$.
3. Calculer $w_1 w_2$.
4. En déduire une équation du second degré ayant w_1, w_2 pour racines, puis vérifier en calculant z_1, z_2 .

Exercice 21 — Identité de Sophie Germain — équation de degré 4

Résoudre

$$z^4 + 4 = 0.$$

1. Montrer que $z^4 + 4 = (z^2 + 2)^2 - (2z)^2$.
2. En déduire une factorisation en deux trinômes réels.
3. Résoudre chacun des deux trinômes.
4. Donner la factorisation complète sur $\mathbb{C}$.

Exercice 22 — Polynôme réciproque — substitution $z + \frac{1}{z}$

Résoudre

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0.$$

1. Montrer que $z = 0$ n'est pas solution et diviser l'équation par z^2 .
2. Poser $X = z + \frac{1}{z}$ et montrer que $X^2 - 3X + 2 = 0$.
3. Résoudre successivement $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = 2$.
4. Donner toutes les solutions en précisant les multiplicités.

Exercice 23 — Équation non linéaire avec conjugué

Résoudre

$$\bar{z} = z^2.$$

1. Poser $z = x + iy$ et obtenir un système réel.
2. Résoudre le cas $y = 0$.
3. Résoudre le cas $y \neq 0$.
4. Donner l'ensemble des solutions.

Exercice 24 — Équation rationnelle avec conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$, avec $\bar{z} + 1 \neq 0$,

$$\frac{z-1}{\bar{z}+1} = 2i.$$

1. Poser $z = x + iy$ et supprimer le quotient.
2. Montrer que x, y vérifient un système de deux équations.
3. Résoudre ce système.
4. Vérifier que la solution respecte la condition $\bar{z} + 1 \neq 0$.

Exercice 25 — Vrai ou faux — justification complète

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

1. Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
2. Si $z \neq 0$ et $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
3. Si $z\bar{z} = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
4. Si $z^2 \in \mathbb{R}$, alors z est réel ou imaginaire pur.

Exercice 26 — Déterminer deux paramètres grâce à une racine complexe

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + 2.$$

On suppose que $1 + i$ est une racine.

1. Calculer $(1+i)^2$ et $(1+i)^3$.
2. Écrire $P(1+i) = 0$ et identifier les parties réelle et imaginaire.
3. Déterminer a et b .
4. Factoriser le polynôme obtenu et résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 27 — Substitution $Z = z^2$ — biquadratique

Résoudre

$$z^4 - 6z^2 + 25 = 0.$$

1. Poser $Z = z^2$ et résoudre $Z^2 - 6Z + 25 = 0$.
2. Montrer que $Z = 3 + 4i$ ou $Z = 3 - 4i$.
3. Déterminer les racines carrées de ces deux nombres.
4. Donner les quatre solutions.

Exercice 28 — Changement affine d'inconnue complexe

Résoudre

$$((1-i)z + 2i)^2 - 2((1-i)z + 2i) + 5 = 0.$$

1. Poser $w = (1-i)z + 2i$ et écrire l'équation vérifiée par w .
2. Résoudre cette équation en w .
3. Pour chacune des deux valeurs de w , retrouver z .
4. Vérifier que deux solutions distinctes sont obtenues.

Exercice 29 — Bombelli — une résolution guidée d'une équation de degré 3

On considère l'équation réelle

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

On cherche une solution sous la forme $x = u + v$, avec $u, v \in \mathbb{C}$.

1. Développer $(u+v)^3$ et montrer que, si $uv = 5$, l'équation se ramène à $u^3 + v^3 = 4$.
2. Poser $U = u^3$ et $V = v^3$. Montrer que U et V sont les solutions de $T^2 - 4T + 125 = 0$.
3. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$, puis vérifier que $(2+i)^3 = 2 + 11i$ et $(2-i)^3 = 2 - 11i$. En déduire une solution réelle de l'équation initiale.
4. Factoriser alors $x^3 - 15x - 4$ et déterminer toutes ses solutions réelles.

Exercice 30 — Synthèse — suite réelle construite avec deux conjugués

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = (2+i)^n + (2-i)^n.$$

1. Montrer que u_n est réel pour tout n .
2. Vérifier que $2+i$ et $2-i$ sont racines de $X^2 - 4X + 5$.
3. En déduire la relation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$ et calculer u_0, u_1 .
4. Calculer u_{10} à l'aide de la récurrence.