

Arithmétique - divisibilité, nombres premiers, PGCD / PPCM

Exercices seuls - Classe de 3e

20 exercices - niveau Brevet avancé - version impression noir et blanc

Exercice 1 - PGCD par l'algorithme d'Euclide

Consigne. On considère les deux nombres 126 et 210.

1. Calculer le PGCD de 126 et 210 par l'algorithme d'Euclide.
2. Écrire la fraction $\frac{126}{210}$ sous forme irréductible.
3. Déterminer le plus grand nombre de lots identiques que l'on peut faire avec 126 stylos et 210 cahiers.
4. Donner la composition exacte de chaque lot.

Exercice 2 - Partage de friandises – problème classique

Consigne. Une personne dispose de 84 sucettes et 147 bonbons. Elle veut préparer des sachets tous identiques, sans reste.

1. Expliquer pourquoi le nombre de sachets doit être un diviseur commun de 84 et 147.
2. Déterminer le plus grand nombre possible de sachets.
3. Donner le contenu de chaque sachet.
4. Vérifier que toutes les friandises sont utilisées.

Exercice 3 - Fraction irréductible et divisibilité

Consigne. On donne la fraction $\frac{924}{1260}$.

1. Calculer PGCD(924; 1260).
2. Simplifier la fraction $\frac{924}{1260}$ au maximum.
3. Justifier que la fraction obtenue est irréductible.
4. Donner une valeur décimale approchée au millième.

Exercice 4 - Carrelage d'une terrasse rectangulaire

Consigne. Une terrasse rectangulaire mesure 525 cm de long et 315 cm de large. On veut la recouvrir avec des dalles carrées identiques, les plus grandes possibles, sans découpe.

1. Expliquer pourquoi la longueur du côté d'une dalle doit diviser 525 et 315.
2. Calculer la plus grande longueur possible du côté d'une dalle.
3. Déterminer le nombre de dalles nécessaires dans la longueur et dans la largeur.
4. Calculer le nombre total de dalles.

Exercice 5 - Bouquets identiques – fleurs rouges et blanches

Consigne. Un fleuriste a 96 roses rouges et 120 roses blanches. Il veut composer le plus grand nombre possible de bouquets identiques en utilisant toutes les roses.

1. Calculer le nombre maximal de bouquets.
2. Donner la composition d'un bouquet.
3. Si chaque bouquet est vendu 9,50 €, calculer la recette totale.
4. Si le fleuriste voulait seulement 12 bouquets, combien de roses de chaque couleur y aurait-il par bouquet ?

Exercice 6 - Reconnaître des nombres premiers

Consigne. On considère les nombres 97, 121, 143 et 169.

1. Tester si 97 est un nombre premier.
2. Décomposer 121, 143 et 169 en produit de facteurs premiers.
3. Parmi les quatre nombres, lesquels sont premiers ?
4. Expliquer pourquoi il suffit de tester les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à la racine carrée du nombre.

Exercice 7 - Décomposition en facteurs premiers et PGCD

Consigne. On donne $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $B = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

1. Calculer A et B .
2. Déterminer $\text{PGCD}(A; B)$ à partir des décompositions.
3. Déterminer $\text{PPCM}(A; B)$.
4. Vérifier la relation $A \times B = \text{PGCD}(A; B) \times \text{PPCM}(A; B)$.

Exercice 8 - PPCM – bus et horaires

Consigne. Deux bus partent du même arrêt à 8 h. Le bus A passe toutes les 18 minutes et le bus B toutes les 24 minutes.

1. Expliquer pourquoi le problème utilise le PPCM.
2. Calculer au bout de combien de minutes les deux bus repasseront ensemble.
3. Donner l'heure de leur prochain passage commun.
4. Entre 8 h et 12 h inclus, combien de passages communs y aura-t-il ?

Exercice 9 - Deux fractions à comparer après simplification

Consigne. On considère $A = \frac{221}{391}$ et $B = \frac{187}{323}$.

1. Simplifier A au maximum.
2. Simplifier B au maximum.
3. Comparer A et B .
4. Calculer $A - B$ sous forme de fraction irréductible.

Exercice 10 - Grand rectangle et pavage carré

Consigne. Un panneau rectangulaire mesure 1,44 m sur 2,16 m. On veut le découper en carrés identiques les plus grands possible.

1. Convertir les dimensions en centimètres.
2. Calculer la longueur du côté du plus grand carré possible.
3. Déterminer le nombre de carrés obtenus.
4. Vérifier le résultat avec les aires.

Exercice 11 - Nombre inconnu et contraintes de divisibilité

Consigne. On cherche un nombre entier n compris entre 200 et 260, divisible par 6, par 8, mais pas par 5.

1. Expliquer pourquoi n doit être un multiple du PPCM de 6 et 8.
2. Calculer ce PPCM.
3. Lister les nombres possibles entre 200 et 260.
4. Donner ceux qui ne sont pas divisibles par 5.

Exercice 12 - PGCD et équations de partage

Consigne. Un club possède 168 maillots, 252 shorts et 294 paires de chaussettes. Il veut former le plus grand nombre possible d'équipements identiques.

1. Calculer le PGCD de 168, 252 et 294.
2. Déterminer le nombre maximal d'équipements.
3. Donner la composition de chaque équipement.
4. Vérifier que toutes les pièces sont utilisées.

Exercice 13 - Simplification avant calcul

Consigne. Calculer exactement :

$$A = \frac{378}{630} + \frac{154}{231}.$$

1. Simplifier $\frac{378}{630}$.
2. Simplifier $\frac{154}{231}$.
3. Calculer A sous forme de fraction irréductible.
4. Donner une valeur décimale approchée au centième.

Exercice 14 - Énigme arithmétique – reste et division

Consigne. Un nombre entier N est compris entre 500 et 600. Lorsqu'on le divise par 12, 15 ou 20, le reste est toujours 7.

1. Expliquer pourquoi $N - 7$ est un multiple commun de 12, 15 et 20.

2. Calculer le PPCM de 12, 15 et 20.
3. Trouver N .
4. Vérifier les trois divisions.

Exercice 15 - Boîtes identiques et contrainte supplémentaire

Consigne. On veut ranger 180 crayons bleus et 252 crayons rouges dans des boîtes identiques. Toutes les boîtes doivent contenir le même nombre de crayons bleus et le même nombre de crayons rouges.

1. Déterminer le plus grand nombre possible de boîtes.
2. Donner la composition d'une boîte.
3. Peut-on faire exactement 30 boîtes identiques sans reste ? Justifier.
4. Peut-on faire exactement 36 boîtes identiques sans reste ? Justifier.

Exercice 16 - Deux méthodes pour un même PGCD

Consigne. On veut calculer $\text{PGCD}(756; 1134)$.

1. Calculer ce PGCD avec l'algorithme d'Euclide.
2. Décomposer 756 et 1134 en facteurs premiers.
3. Retrouver le PGCD avec les décompositions.
4. Expliquer quelle méthode est la plus rapide ici.

Exercice 17 - Problème de synchronisation – lumières clignotantes

Consigne. Trois lumières clignotent respectivement toutes les 14, 21 et 30 secondes. Elles s'allument ensemble à 10 h 00 min 00 s.

1. Calculer au bout de combien de secondes elles s'allumeront de nouveau ensemble.
2. Donner l'heure exacte du prochain allumage commun.
3. Combien d'allumages communs aura-t-on pendant les 10 premières minutes, en comptant celui du départ ?
4. Même question pendant 1 heure.

Exercice 18 - PGCD, PPCM et relation fondamentale

Consigne. Deux entiers positifs a et b vérifient $a = 84$ et $\text{PPCM}(a; b) = 420$. On sait aussi que $\text{PGCD}(a; b) = 28$.

1. Rappeler la relation entre produit, PGCD et PPCM.
2. Calculer b .
3. Vérifier que le résultat convient.
4. Simplifier la fraction $\frac{a}{b}$.

Exercice 19 - Challenge Brevet – trois données à organiser

Consigne. Une association prépare des colis identiques avec 240 boîtes de riz, 360 boîtes de pâtes et 420 conserves. Elle veut utiliser tous les produits.

1. Déterminer le nombre maximal de colis identiques.
2. Donner la composition d'un colis.
3. Chaque colis est donné à une famille. Si 52 familles sont inscrites, combien de colis restera-t-il après la distribution ?
4. Finalement, l'association veut préparer exactement 72 colis identiques en gardant la même composition que dans la question (b). Combien de boîtes de riz, de pâtes et de conserves faut-il ajouter au minimum ?

Exercice 20 - Challenge final – synchronisation et PPCM

Consigne. Deux signaux lumineux se déclenchent ensemble à 8 h 00. Le premier se déclenche ensuite toutes les 378 secondes et le second toutes les 540 secondes.

1. Calculer $\text{PGCD}(378; 540)$ avec l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire $\text{PPCM}(378; 540)$.
3. Après combien de secondes les deux signaux se déclencheront-ils de nouveau ensemble ? Convertir cette durée en minutes et secondes.
4. À quelle heure exacte les deux signaux se déclencheront-ils de nouveau ensemble ?