

2nde — Nombres réels

Cours synthétique

1 Ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$: entiers naturels $0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Z}$: entiers relatifs $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{D}$: *décimaux* = nombres ayant une écriture finie en base 10.
- $\mathbb{Q}$: rationnels = fractions $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ (écriture décimale finie ou périodique).
- $\mathbb{R}$: réels = rationnels $\cup$ irrationnels ($\sqrt{2}, \pi, \dots$).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Définition

Critère décimal. Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est *décimale* $\iff$ le dénominateur $b = 2^\alpha 5^\beta$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$).

Méthode

Notation scientifique. Tout réel non nul s'écrit $x = \alpha \times 10^n$ avec $1 \leq \alpha < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$. Ex. : $0,000084 = 8,4 \times 10^{-5}$.

2 Fractions (rationnels)

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div d}{b \div d} \quad (d = \text{gcd}(a, b)), \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (c \neq 0).$$

3 Puissances et racines

Pour $a > 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1.$$

Racines (si $a, b \geq 0$) :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Rationaliser un dénominateur : $\frac{c}{\sqrt{k}} = \frac{c\sqrt{k}}{k}$.

4 Valeur absolue et distance

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases} \quad d(x, y) = |x - y|.$$

Inégalité $|x - x_0| \leq r \iff x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

5 Intervalles

$[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ (bornes exclues avec $] [$).

$[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)]$ si $\max(a, c) \leq \min(b, d)$.

$[a, b] \cup [c, d] = [\min(a, c), \max(a, d)]$ si les intervalles se chevauchent.

6 Comparaisons & encadrements

Idées : comparaison par encadrement, passage au carré (en vérifiant les signes), valeur approchée à 10^{-n} , etc. Ex. : $4,47^2 < 20 < 4,48^2 \Rightarrow 4,47 < \sqrt{20} < 4,48$.

7 Exemples rapides

— $\frac{14}{125}$ est décimal ($125 = 5^3$).

— $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

— $|x - 3| \leq 1,2 \iff x \in [1,8; 4,2]$.

— $I = [-4; 1,5], J =]0; 5] \Rightarrow I \cap J =]0; 1,5]$.