

Vecteurs du plan - 2nde

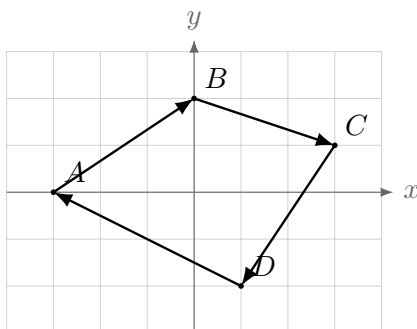
Exercices seuls - version impression

Vecteurs • relation de Chasles • sommes/combinaisons • coordonnées • colinéarité • alignement

Notation : les vecteurs libres sont notés $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots$

Exercice 1 - Relation de Chasles – simplifier des sommes de vecteurs

On considère quatre points distincts A, B, C, D .



- Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.
- Simplifier $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

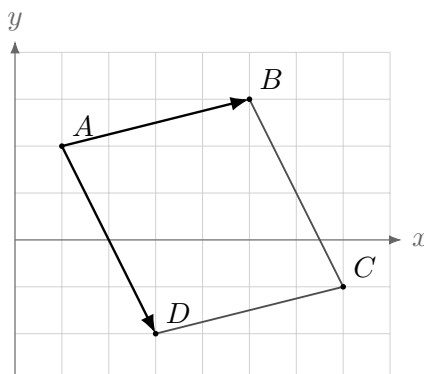
Exercice 2 - Translation – coordonnées d'un vecteur et points images

Dans un repère, $A(-3; 2)$, $B(4; -1)$ et $C(1; 5)$.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- Le point D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer D .
- Déterminer E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
- Vérifier que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et interpréter géométriquement.

Exercice 3 - Parallélogramme – retrouver le quatrième sommet avec les vecteurs

On donne $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ et $C(7; -1)$. On cherche D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme dans cet ordre.



- (a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- (b) Utiliser $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ pour déterminer D .
- (c) Vérifier que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
- (d) Écrire une relation de Chasles reliant $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4 - Coordonnées – somme et combinaison de vecteurs

On considère $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ et $C(6; 2)$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- (b) Vérifier par les coordonnées la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- (c) Calculer $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
- (d) Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

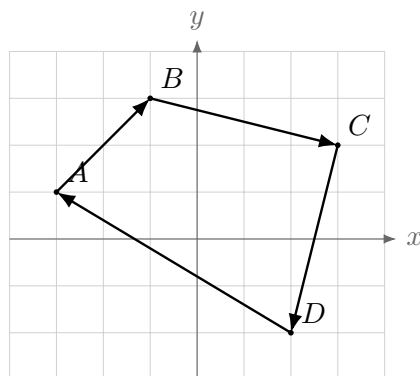
Exercice 5 - Points inconnus – résoudre des équations vectorielles

On donne $A(2; -3)$ et $B(7; 1)$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{AB}$.
- (b) Déterminer C tel que $\overrightarrow{BC} = (-2; 6)$.
- (c) Déterminer D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.
- (d) Simplifier $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, puis vérifier le résultat avec les coordonnées.

Exercice 6 - Chasles sur un quadrilatère – expressions plus longues

Dans un quadrilatère $ABCD$, simplifier les expressions suivantes sans utiliser de coordonnées.



- (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.
- (b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$.
- (d) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 7 - Deux vecteurs de référence – résoudre une combinaison linéaire

On donne $\vec{u}_1 = (3; -2)$ et $\vec{u}_2 = (-1; 4)$.

- Calculer $2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$.
- Calculer $-\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.
- Déterminer a et b tels que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (7; 2)$.
- Vérifier la solution trouvée par substitution.

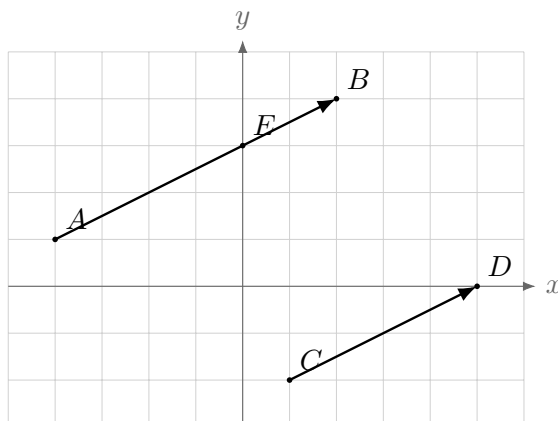
Exercice 8 - Combinaisons – reconnaître des décompositions

On travaille avec $\vec{u}_1 = (2; 1)$ et $\vec{u}_2 = (-1; 3)$.

- Calculer $3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.
- Calculer $2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.
- Exprimer $(4; 9)$ comme combinaison de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- Exprimer $(5; -1)$ comme combinaison de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Exercice 9 - Vecteurs colinéaires – parallélisme dans un repère

On donne $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(1; -2)$ et $D(5; 0)$.



- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
- Montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires et préciser le coefficient de proportionnalité.
- En déduire la position relative des droites (AB) et (CD) .
- Déterminer $E \in [AB]$ tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 10 - Critère de colinéarité – déterminant de deux vecteurs

On considère $\vec{u}_1 = (4; -6)$, $\vec{u}_2 = (-2; 3)$ et $\vec{u}_3 = (6; 4)$.

- Calculer $4 \times 3 - (-6) \times (-2)$ et conclure pour $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- Trouver λ tel que $\vec{u}_2 = \lambda\vec{u}_1$.
- Calculer le déterminant de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$.
- Les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont-ils colinéaires? Justifier sans approximation.

Exercice 11 - Alignement avec paramètre – déterminer une coordonnée

On considère $A(-2; 1)$, $B(4; 5)$ et $C(k; 9)$.

- Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de k .
- Déterminer k pour que A, B, C soient alignés.
- Pour cette valeur de k , écrire $\overrightarrow{AC}$ comme multiple de $\overrightarrow{AB}$.
- En déduire la position de B sur $[AC]$.

Exercice 12 - Parallélisme avec paramètre – utiliser un vecteur directeur

On donne $\vec{u}_1 = (3; -2)$ et un vecteur $\vec{u}_2 = (m; 4)$.

- Écrire la condition de colinéarité de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- Déterminer m pour que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soient colinéaires.
- Pour cette valeur, trouver λ tel que $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
- Si d a pour vecteur directeur $\vec{u}_1$ et d' pour vecteur directeur $\vec{u}_2$, conclure sur d et d' .

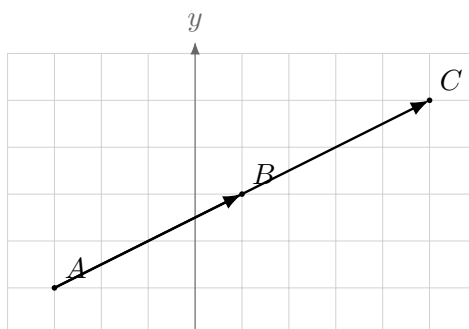
Exercice 13 - Position sur une droite – paramètre vectoriel

On considère $A(1; -2)$ et $B(7; 4)$. Tout point M de la droite (AB) peut s'écrire $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$.
- Déterminer le point M correspondant à $\lambda = \frac{1}{3}$.
- Déterminer le point N correspondant à $\lambda = -\frac{1}{2}$.
- Le point $P(10; 7)$ appartient-il à (AB) ? Si oui, déterminer λ et préciser sa position par rapport au segment $[AB]$.

Exercice 14 - Alignement et rapport – lecture géométrique d'un coefficient

On donne $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$ et $C(5; 6)$.



- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Montrer que A, B, C sont alignés.
- Écrire $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
- En déduire $\frac{AB}{AC}$ et la position exacte de B sur $[AC]$.

Exercice 15 - Médiane d'un triangle – formule vectorielle

Dans le triangle ABC , $A(0;0)$, $B(6;0)$ et $C(2;4)$. Le point M est le milieu de $[BC]$.

- Déterminer les coordonnées de M .
- Calculer $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Vérifier $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- Le point G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Déterminer G .

Exercice 16 - Identités vectorielles – démonstrations sans coordonnées

Soient A, B, C, M, N des points quelconques du plan.

- Montrer que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
- Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MN}$.
- Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
- Simplifier $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.

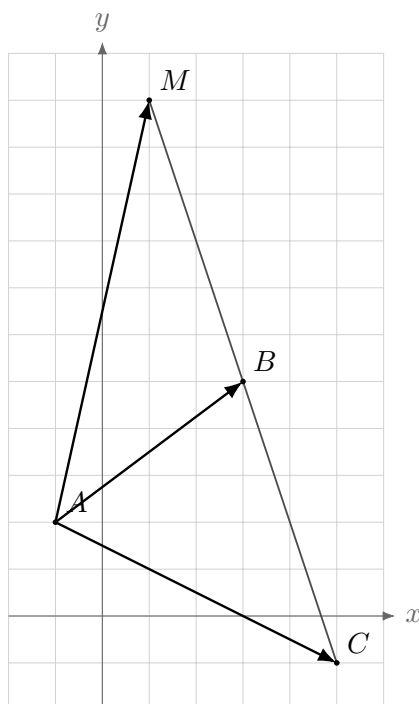
Exercice 17 - Combinaison de deux vecteurs – système exact

On donne $\vec{u}_1 = (2; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; 3)$ et $\vec{u}_3 = (7; 7)$.

- Calculer $5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.
- Déterminer a, b tels que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}_3$.
- Vérifier que la décomposition de $\vec{u}_3$ trouvée est unique.
- Déterminer p, q tels que $p\vec{u}_1 + q\vec{u}_2 = (0; 14)$.

Exercice 18 - Point défini par une combinaison – interprétation par un milieu

On considère $A(-1;2)$, $B(3;5)$ et $C(5;-1)$. Le point M est défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.



- (a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- (b) Déterminer $\overrightarrow{AM}$ puis les coordonnées de M .
- (c) Montrer algébriquement que $M = 2B - C$ au sens des coordonnées.
- (d) En déduire une interprétation géométrique simple concernant B, C, M .

Exercice 19 - Parallélogramme avec paramètre – condition vectorielle

On donne $A(0;0)$, $B(4;1)$, $D(3;4)$ et $C(7;k)$.

- (a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ en fonction de k .
- (b) Déterminer k pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- (c) Pour cette valeur, vérifier également $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- (d) Écrire $\overrightarrow{AC}$ comme somme de deux vecteurs côtés du parallélogramme.

Exercice 20 - Intersection de deux droites – écriture vectorielle paramétrique

On considère la droite d passant par $A(0;1)$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 = (2;1)$, et la droite d' passant par $B(4;0)$ de vecteur directeur $\vec{u}_2 = (-1;1)$.

- (a) Écrire les coordonnées d'un point $M \in d$ en fonction d'un paramètre t .
- (b) Écrire les coordonnées d'un point $N \in d'$ en fonction d'un paramètre s .
- (c) Résoudre le système obtenu pour que $M = N$.
- (d) Donner le point d'intersection et justifier qu'il est unique.

Exercice 21 - Centre de gravité – somme de trois vecteurs

Dans le triangle ABC , $A(-2;1)$, $B(4;3)$, $C(1;8)$. On pose $G(1;4)$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
- (b) Vérifier $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- (c) Calculer le milieu M de $[BC]$ et $\overrightarrow{AM}$.
- (d) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Exercice 22 - Milieu – caractérisations vectorielles équivalentes

On donne $A(-4;2)$, $B(2;6)$ et $M(-1;4)$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
- (b) Montrer que $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.
- (c) En déduire que M est le milieu de $[AB]$.
- (d) Montrer réciproquement que si un point N vérifie $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$, alors N est le milieu de $[AB]$.

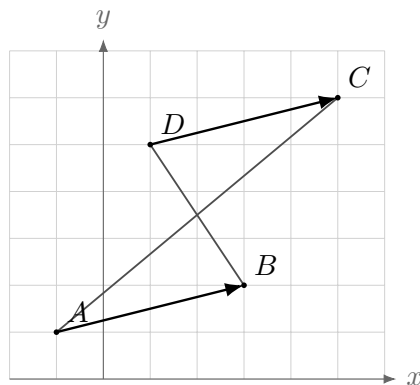
Exercice 23 - Parallélisme par combinaison vectorielle – points au tiers

Dans le triangle ABC , $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(2;6)$. Les points P et Q vérifient $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

- Déterminer les coordonnées de P et Q .
- Calculer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
- En déduire le parallélisme de (PQ) et (BC) , puis comparer les longueurs PQ et BC .

Exercice 24 - Parallélogramme avec coordonnée inconnue – deux méthodes

On considère $A(-1;1)$, $B(3;2)$, $D(1;5)$ et $C(k;6)$.



- Déterminer k en utilisant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Retrouver k en utilisant l'égalité des milieux des diagonales.
- Pour la valeur trouvée, calculer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
- Les diagonales sont-elles colinéaires ? Justifier.

Exercice 25 - Partager un segment dans un rapport – écriture vectorielle

On donne $A(-3;-2)$ et $B(6;4)$. Le point $M \in [AB]$ vérifie $AM = 2MB$.

- Traduire la condition en une relation entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- Déterminer les coordonnées de M .
- Déterminer N tel que $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- Préciser la position de N par rapport à A et B .

Exercice 26 - Alignement avec paramètre – position relative après résolution

On considère $A(1;2)$, $B(5;-1)$ et $C(k;5)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déterminer k pour que A, B, C soient alignés.
- Pour cette valeur, écrire $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.
- En déduire une relation de milieu entre A, B, C .

Exercice 27 - Intersection des médianes – démonstration coordonnée

Dans le triangle ABC , $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(0;9)$. On note M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AC]$.

- Déterminer M et N .
- Déterminer G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
- Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$.
- Conclure sur l'intersection des médianes (AM) et (BN) .

Exercice 28 - Deux écritures paramétriques – résoudre une intersection vectorielle

On considère $d : M = A + \lambda \vec{u}_1$ avec $A(0;0)$, $\vec{u}_1 = (2;1)$, et $d' : M = C + \mu \vec{u}_2$ avec $C(6;0)$, $\vec{u}_2 = (-1;1)$.

- Écrire les coordonnées de M sur d .
- Écrire les coordonnées de M sur d' .
- Déterminer λ et μ au point d'intersection.
- Donner les coordonnées du point d'intersection et vérifier les deux écritures vectorielles.

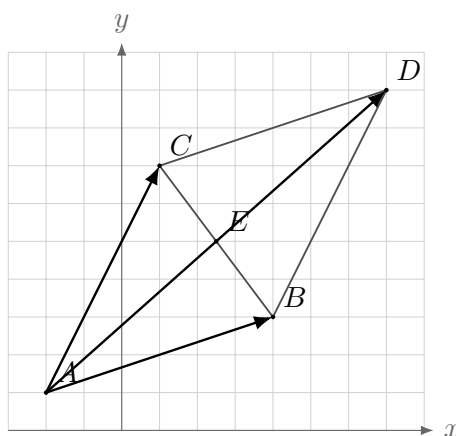
Exercice 29 - Équation vectorielle avec un point mobile – résoudre exactement

On donne $A(1;3)$ et $B(5;-1)$. On cherche M tel que $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$.

- Écrire l'égalité sur les deux coordonnées si $M(x;y)$.
- Résoudre et déterminer M .
- Transformer l'égalité vectorielle pour exprimer M à partir de A et B .
- Interpréter géométriquement la relation entre A, B, M .

Exercice 30 - Synthèse finale – Chasles, combinaison, parallélogramme et milieu

On considère $A(-2;1)$, $B(4;3)$, $C(1;7)$. On définit D par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et E par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



- Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, puis déterminer D et E .
- Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.
- Montrer que E est à la fois le milieu de $[AD]$ et le milieu de $[BC]$.
- On pose $M_t = A + t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Déterminer t pour avoir $M_t = E$, puis $M_t = D$, et en déduire l'alignement de A, E, D .