Vecteurs du plan – 2nde

Partie A – Constructions et calcul vectoriel sans coordonnees

Exercice 1 – Vecteurs égaux, opposés et vecteur nul

Soient A, B, C, D quatre points du plan.

(a) Compléter : $\overrightarrow{BA} = \ldots \overrightarrow{AB}$.

(b) Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

(c) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, comparer AB et DC, puis préciser la position relative de (AB) et (DC).

(d) Donner un vecteur opposé à $\overrightarrow{CD}$.

(e) Que peut-on dire de A et B si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$?

Exercice 2 – Relation de Chasles – calculs directs

Réduire chacune des expressions à un seul vecteur ou au vecteur nul.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

(b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

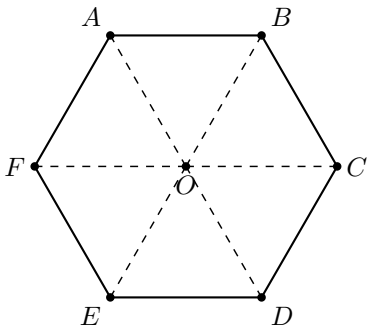
(d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

(e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

(f) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 3 – Hexagone régulier – calcul vectoriel géométrique

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O. Sans utiliser de coordonnées, simplifier les vecteurs suivants en utilisant uniquement des points de la figure.



(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

(b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$.

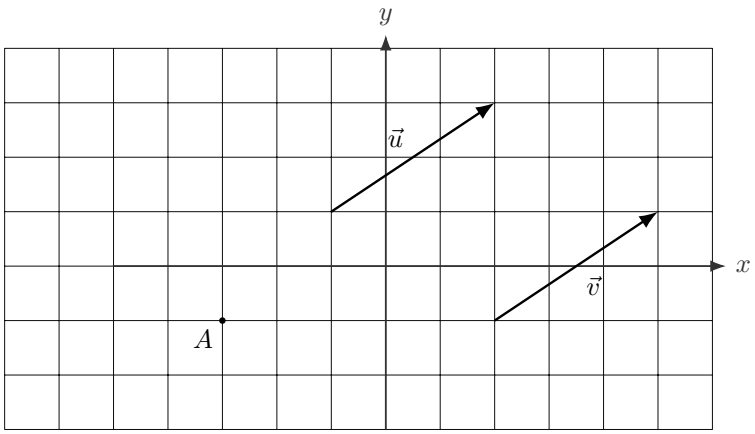
(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$.

(d) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB}$.

(e) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Exercice 4 – Construire une somme de deux vecteurs dans un repère

Dans le repère ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés ainsi qu'un point A. Le repère sert uniquement à faciliter la construction : **ne pas calculer de coordonnées**.



(a) Construire à partir de A un représentant de $\vec{u}$.

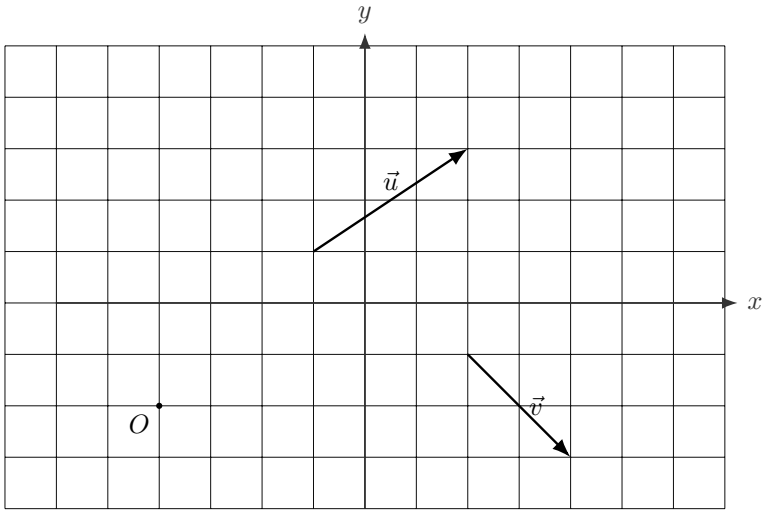
(b) À son extrémité, construire un représentant de $\vec{v}$.

(c) Construire alors, d'origine A, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

(d) Refaire la construction dans l'ordre $\vec{v}$ puis $\vec{u}$. Que constate-t-on ?

Exercice 5 – Somme, différence et multiple dans un repère

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et un point O représentés dans le repère ci-dessous. Utiliser le quadrillage pour construire les vecteurs demandés, **sans calcul de coordonnées**.



Construire, à partir du point O, un représentant de chacun des vecteurs suivants :

(a) $\vec{u}+\vec{v}$;

(b) $\vec{u}-\vec{v}$;

(c) $2\vec{u}$;

(d) $2\vec{u}+\vec{v}$;

(e) $\vec{u}+2\vec{v}$.

Exercice 6 – Multiples d'un vecteur – placement de points

On donne un segment $[AB]$ de longueur 8 cm. Construire et justifier la position des points suivants :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{BQ}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Pour chaque point, préciser s'il appartient au segment $[AB]$, à la demi-droite $[AB)$ ou seulement à la droite (AB).

Exercice 7 – Équation vectorielle sur une droite

A et B sont deux points distincts. Pour chacune des relations suivantes, déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, puis placer M sur une figure.

(a) $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(b) $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

(c) $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 8 – Milieu – caractérisations vectorielles

I est le milieu de $[AB]$.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

(b) Montrer que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

(c) Soit M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Démontrer que $M = I$.

(d) Montrer que pour tout point X, on a

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XI}.$$

Exercice 9 – Parallélogramme – relations vectorielles

$ABCD$ est un parallélogramme.

(a) Donner un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$ et un vecteur égal à $\overrightarrow{AD}$.

(b) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(c) Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

(d) O est le centre du parallélogramme. Montrer que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

(e) En déduire que, pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

Exercice 10 – Triangle – décomposer dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

ABC est un triangle. Exprimer uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

(a) $\overrightarrow{BC}$;

(b) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$;

(c) $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$;

(d) $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$;

(e) $2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

Exercice 11 – Points fractionnaires dans un triangle – retrouver un parallélisme

ABC est un triangle. Les points M et N sont définis par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

(d) Quelle propriété géométrique retrouve-t-on ?

Exercice 12 – Trois points construits – démontrer un alignement

Soit ABC un triangle. On définit D, E, F par

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}.$$

(a) Faire une figure et conjecturer la position relative de D, E, F.

(b) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) Exprimer $\overrightarrow{DF}$ dans la même base.

(d) Démontrer la conjecture.

Exercice 13 – Repère lié à un triangle

ABC est un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AI]$. On travaille dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(a) Déterminer les coordonnées de B et C.

(b) Déterminer les coordonnées de I puis de J.

(c) Calculer les coordonnées du vecteur

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}.$$

(d) En déduire une relation vectorielle simple vérifiée par J.

Exercice 14 – Médianes – identité vectorielle

Dans le triangle ABC, A' est le milieu de $[BC]$, B' celui de $[CA]$ et C' celui de $[AB]$.

(a) Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

(b) Écrire deux relations analogues pour $2\overrightarrow{BB'}$ et $2\overrightarrow{CC'}$.

(c) En déduire

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

Partie B – Colinéarité, alignement, parallélisme et démonstrations

Exercice 15 – Reconnaître des vecteurs colinéaires

Dans chacun des cas suivants, déterminer si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Lorsqu'ils le sont, donner le coefficient de colinéarité.

(a) $\vec{u} = (6; -9)$ et $\vec{v} = (-4; 6)$.

(b) $\vec{u} = (2; 5)$ et $\vec{v} = (6; 14)$.

(c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{6}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

(d) $\vec{u} = (-3; 0)$ et $\vec{v} = (7; 0)$.

Exercice 16 – Colinéarité avec paramètre

On donne $\vec{u} = (m; m+1)$ et $\vec{v} = (4; m+1)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) Écrire la condition de colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(b) Résoudre l'équation obtenue.

(c) Vérifier chaque valeur trouvée dans les vecteurs initiaux.

Exercice 17 – Alignement de trois points construits

ABC est un triangle. Les points E, F, D sont définis par

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{BF}, \qquad 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

(c) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(d) Montrer que D, E, F sont alignés.

Exercice 18 – Parallélogramme – un parallélisme non immédiat

$ABCD$ est un parallélogramme. E et F vérifient

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ dans la même base.

(c) Les droites (EF) et (AC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 19 – Rectangle et quadrilatère intérieur

$ABCD$ est un rectangle. Les points I, J, K, L sont définis par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

On travaille dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

(a) Déterminer les coordonnées de I, J, K, L.

(b) Calculer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

(c) Déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

(d) Montrer que le centre du rectangle $ABCD$ est aussi le milieu de $[IK]$.

Exercice 20 – Trapèze puis alignement

Dans un repère, on donne

$$A(-7;-5), \quad B(-4;1), \quad C(10;4), \quad D(6;-4).$$

(a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $ABCD$ est un trapèze.

(b) I est le milieu de $[CD]$. Déterminer ses coordonnées.

(c) M est défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DB}$. Déterminer ses coordonnées.

(d) Démontrer que A, M, I sont alignés.

Exercice 21 – Alignement et parallélisme par déterminant

On donne les points

$$A(-3;2), \quad B(1;4), \quad C(-1;-3), \quad D(-3;-4), \quad E(5;6).$$

(a) Les points A, B, E sont-ils alignés ?

(b) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

(c) Déterminer une valeur de y pour que le point $F(7;y)$ soit aligné avec A et B.

Exercice 22 – Centre de gravité – raisonnement vectoriel

Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[BC]$. On considère le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

(a) Montrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

(b) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

(c) Que peut-on en conclure sur la position de G ?

(d) Écrire une relation analogue sur les deux autres médianes.

Exercice 23 – Alignement par colinéarité

ABC est un triangle. Les points N et P sont définis par

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) En déduire une expression de $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(c) Chercher un réel k tel que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AP}$.

(d) Que peut-on conclure sur les points A, N, P ?

Exercice 24 – Deux points définis par des combinaisons

Dans un triangle ABC, les points M et N vérifient

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{BC}$ dans la même base.

(c) Montrer que $\overrightarrow{MN}$ est un multiple de $\overrightarrow{BC}$.

(d) Que peut-on conclure sur les droites (MN) et (BC) ?

Partie C – Coordonnées, vecteurs et géométrie analytique

Exercice 25 – Point défini par une combinaison de vecteurs

On donne $A(4;2)$, $B(-2;1)$ et $C(-3;5)$. Le point M est défini par

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.$$

(a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$.

(c) En déduire les coordonnées de M.

(d) Vérifier le résultat directement à partir des coordonnées de A et de M.

Exercice 26 – Translation et image d'un point

On donne $A(-3;2)$, $B(4;-1)$ et $C(1;5)$.

(a) Calculer $\overrightarrow{AB}$.

(b) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer D.

(c) Déterminer E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.

(d) Vérifier que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et interpréter géométriquement.

Exercice 27 – Quatrième sommet d'un parallélogramme

On donne $A(1;2)$, $B(5;3)$ et $C(7;-1)$. On cherche D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme dans cet ordre.

(a) Écrire une égalité vectorielle caractérisant le parallélogramme.

(b) Déterminer les coordonnées de D.

(c) Vérifier que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

(d) Calculer ce milieu.

Exercice 28 – Distances, milieux et nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, on donne $A(3;-1)$, $B(7;5)$ et $C(-3;3)$.

(a) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

(b) Calculer AB^2, AC^2 et BC^2.

(c) Déterminer la nature du triangle ABC en justifiant.

(d) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 29 – Alignement et parallélisme

(a) On donne $A(-2;-1)$, $B(5;3)$ et $C(12;7)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

(b) On donne $E(-3;2)$, $F(1;4)$, $G(-1;-3)$ et $H(-3;-4)$. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

(c) Dans chaque cas, présenter une justification par déterminant.

Exercice 30 – Coordonnée inconnue et colinéarité

On donne $A(2;2)$, $B(x;3)$ et $C(6;x)$.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(b) Déterminer la ou les valeurs de x pour lesquelles A, B, C sont alignés.

(c) Pour chaque valeur trouvée, vérifier directement la colinéarité.

Exercice 31 – Équation vectorielle avec un point mobile

On donne $A(1;3)$ et $B(5;-1)$. Déterminer le point $M(x;y)$ tel que

$$\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}.$$

(a) Écrire l'égalité sur les deux coordonnées.

(b) Résoudre le système obtenu.

(c) Transformer l'égalité vectorielle pour exprimer directement M à partir de A et B.

(d) Interpréter géométriquement la position de M sur la droite (AB).

Exercice 32 – Repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et alignement

ABC est un triangle. K est le milieu de $[AC]$, I celui de $[BK]$, et J est défini par

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BJ}.$$

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

(a) Déterminer les coordonnées de K.

(b) Déterminer les coordonnées de I.

(c) Déterminer les coordonnées de J.

(d) Démontrer que A, I, J sont alignés.

Exercice 33 – Quadrilatère des milieux – théorème de Varignon

Dans un repère orthonormé, on donne

$$A(-4;2), \quad B(-2;-4), \quad C(5;-3), \quad D(4;6).$$

I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

(a) Déterminer les coordonnées de I, J, K, L.

(b) Calculer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

(c) Calculer $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IL}$.

(d) En déduire la nature de $IJKL$.

(e) Calculer IJ, IL et JL. Le quadrilatère $IJKL$ est-il un rectangle ?

Exercice 34 – Cercle de diamètre et vecteurs

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1;1)$ et $B(5;3)$. Soit K le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On considère $C(1;5)$.

(a) Déterminer les coordonnées de K et calculer KA^2.

(b) Calculer KC^2. Le point C appartient-il à $\mathcal{C}$?

(c) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

(d) En déduire la nature du triangle ACB.

(e) Montrer que $AC = BC$ et conclure complètement sur le triangle ACB.

Exercice 35 – Deux vecteurs de référence – résoudre une combinaison linéaire

On donne $\vec{u}_1 = (3;-2)$ et $\vec{u}_2 = (-1;4)$.

(a) Calculer $2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$.

(b) Calculer $-\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

(c) Déterminer a et b tels que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (7;2)$.

(d) Vérifier la solution trouvée par substitution.

Exercice 36 – Combinaison de deux vecteurs – système exact

On donne $\vec{u}_1 = (2;-1)$, $\vec{u}_2 = (1;3)$ et $\vec{u}_3 = (7;7)$.

(a) Calculer $5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

(b) Déterminer a, b tels que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{u}_3$.

(c) Vérifier que la décomposition de $\vec{u}_3$ trouvée est unique.

(d) Déterminer p, q tels que $p\vec{u}_1 + q\vec{u}_2 = (0;14)$.

Exercice 37 – Parallélisme avec paramètre – utiliser un vecteur directeur

On donne $\vec{u}_1 = (3;-2)$ et un vecteur $\vec{u}_2 = (m;4)$.

(a) Écrire la condition de colinéarité de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

(b) Déterminer m pour que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ soient colinéaires.

(c) Pour cette valeur, trouver λ tel que $\vec{u}_2 = \lambda\vec{u}_1$.

(d) Si d a pour vecteur directeur $\vec{u}_1$ et d' pour vecteur directeur $\vec{u}_2$, conclure sur d et d'.

Exercice 38 – Position sur une droite – paramètre vectoriel

On considère $A(1;-2)$ et $B(7;4)$. Tout point M de la droite (AB) peut s'écrire $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

(a) Calculer $\overrightarrow{AB}$.

(b) Déterminer le point M correspondant à $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

(c) Déterminer le point N correspondant à $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

(d) Le point $P(10;7)$ appartient-il à (AB) ? Si oui, déterminer λ et préciser sa position par rapport au segment $[AB]$.

Exercice 39 – Partager un segment dans un rapport – écriture vectorielle

On donne $A(-3;-2)$ et $B(6;4)$. Le point $M \in [AB]$ vérifie $AM = 2MB$.

(a) Traduire la condition en une relation entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

(b) Déterminer les coordonnées de M.

(c) Déterminer N tel que $\overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

(d) Préciser la position de N par rapport à A et B.

Partie D – Problèmes de synthèse et approfondissements

Exercice 40 – Trois points, deux méthodes

On donne $A(-2;1)$, $B(3;3)$ et $C(0;-1)$.

(a) Déterminer D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(b) Déterminer le centre L du parallélogramme.

(c) Déterminer le centre de gravité G du triangle ABD.

(d) E est le symétrique de C par rapport à D. Déterminer E.

(e) Les points E, G, B sont-ils alignés ? Justifier par un calcul vectoriel.

Exercice 41 – Trois milieux et un point extérieur

Dans un triangle ABC, K, L, M sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$. P est le milieu de $[LC]$ et Q est le symétrique de K par rapport à B.

(a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées de P, M, Q.

(b) Les points P, M, Q sont-ils alignés ?

(c) Donner une justification par déterminant.

Exercice 42 – Parallélisme caché dans un triangle

Soit ABC un triangle. On définit D et E par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$.

(c) Montrer que A, D, E sont alignés.

(d) Calculer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

(e) En déduire que (DE) et (BC) sont parallèles.

Exercice 43 – Deux droites définies vectoriellement – approfondissement

Dans un repère, on considère les droites

$$d : \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}, \quad A(0;0), \ \vec{u} = (2;1),$$

$$d' : \ \overrightarrow{CM} = \mu \vec{v}, \quad C(6;0), \ \vec{v} = (-1;1).$$

(a) Écrire les coordonnées d'un point M de d en fonction de λ.

(b) Écrire les coordonnées d'un point M de d' en fonction de μ.

(c) Déterminer λ et μ au point d'intersection.

(d) Donner les coordonnées du point d'intersection et vérifier dans les deux écritures.

Exercice 44 – Synthèse – parallélogramme, milieu et centre de gravité

On donne $A(-2;1)$, $B(4;3)$ et $C(1;7)$. On définit D par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

et E par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

(a) Déterminer les coordonnées de D.

(b) Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

(c) Déterminer les coordonnées de E.

(d) Montrer que E est le milieu de $[AD]$ puis aussi de $[BC]$.

(e) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer G.

(f) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 45 – Défi de fin de chapitre – construction, conjecture, preuve

ABC est un triangle. On définit M, N, P par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

(a) Construire M, N, P sur une figure soignée.

(b) Conjecturer la nature du quadrilatère $AMPN$.

(c) Exprimer $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$.

(d) Démontrer la conjecture.

(e) Soit Q tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. Étudier l'alignement éventuel de M, P, Q.

Exercice 46 – Intersection des médianes – démonstration coordonnée

Dans le triangle ABC, $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(0;9)$. On note M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AC]$.

(a) Déterminer M et N.

(b) Déterminer G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

(c) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$.

(d) Conclure sur l'intersection des médianes (AM) et (BN).

Exercice 47 – Parallélogramme avec paramètre – condition vectorielle

On donne $A(0;0)$, $B(4;1)$, $D(3;4)$ et $C(7;k)$.

(a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ en fonction de k.

(b) Déterminer k pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(c) Pour cette valeur, vérifier également $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

(d) Écrire $\overrightarrow{AC}$ comme somme de deux vecteurs côtés du parallélogramme.

Exercice 48 – Intersection de deux droites – écriture vectorielle paramétrique

On considère la droite d passant par $A(0;1)$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 = (2;1)$, et la droite d' passant par $B(4;0)$ de vecteur directeur $\vec{u}_2 = (-1;1)$.

(a) Écrire les coordonnées d'un point $M \in d$ en fonction d'un paramètre t.

(b) Écrire les coordonnées d'un point $N \in d'$ en fonction d'un paramètre s.

(c) Résoudre le système obtenu pour que $M = N$.

(d) Donner le point d'intersection et justifier qu'il est unique.