

Variations de fonctions – 2nde

Exercice 1 – Vocabulaire : croissante, décroissante, constante

On travaille sur un intervalle I .

1. Donner la définition d'une fonction croissante sur I .
2. Donner la définition d'une fonction décroissante sur I .
3. Une fonction constante est-elle à la fois croissante et décroissante au sens large ?
4. Que signifie « strictement croissante » ?

Exercice 2 – Lire un tableau de variation

La fonction f est définie sur $[-4; 6]$ et son tableau est donné ci-dessous.

x	-4	1	6
f	-2	5	0

1. Donner les intervalles où f est croissante puis décroissante.
2. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-4; 6]$, ainsi que les abscisses où ils sont atteints.
3. Comparer $f(-3)$ et $f(0)$.
4. Comparer $f(2)$ et $f(5)$.

Exercice 3 – Comparer des images grâce à la monotonie

On sait que g est croissante sur $[-5; 2]$ et décroissante sur $[2; 7]$.

1. Comparer $g(-4)$ et $g(1)$.
2. Comparer $g(3)$ et $g(6)$.
3. Peut-on comparer $g(-1)$ et $g(5)$ avec les seules données ?
4. Que peut-on dire de $g(2)$ par rapport aux autres images ?

Exercice 4 – Encadrer les images sur un intervalle monotone

La fonction f est strictement croissante sur $[-2; 5]$ et $f(-2) = -7$, $f(1) = -1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 9$.

1. Encadrer $f(x)$ pour $x \in [-2; 5]$.
2. Encadrer $f(x)$ pour $x \in [1; 3]$.
3. Encadrer $f(0)$.
4. Encadrer $f(4)$.

Exercice 5 – Extremums : local et global

On considère le tableau de variation suivant.

x	-5	-1	3	6
f	2	7	-1	4

1. Identifier les deux changements de sens de variation.
2. Donner les extremums locaux.
3. Donner le maximum global et le minimum global sur $[-5; 6]$.
4. Une valeur extrême peut-elle être atteinte en plusieurs points ?

Exercice 6 – Construire un tableau à partir d'un texte

Une fonction u est définie sur $[-6; 8]$. Elle est croissante sur $[-6; -2]$, décroissante sur $[-2; 3]$, puis croissante sur $[3; 8]$. On sait $u(-6) = -5$, $u(-2) = 4$, $u(3) = -1$, $u(8) = 6$.

1. Construire le tableau de variation de u .
2. Donner le maximum et le minimum globaux.
3. Comparer $u(-4)$ et $u(-3)$.
4. Comparer $u(0)$ et $u(2)$.

Exercice 7 – Fonction affine : sens de variation et image d'intervalle

On considère $f(x) = 3x - 2$.

1. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Construire son tableau de variation.
3. Déterminer l'image de $[-2; 4]$.
4. Résoudre $1 < f(x) < 10$.

Exercice 8 – Famille affine avec paramètre

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit $g_m(x) = (m - 2)x + 5$.

1. Pour quelles valeurs de m la fonction est-elle strictement croissante ?
2. Strictement décroissante ?
3. Constante ?
4. Pour $m = 5$, donner le minimum et le maximum de g_m sur $[-1; 3]$.

Exercice 9 – Fonction carré : tableau et images d'intervalles

On considère $f(x) = x^2$.

1. Construire le tableau de variation de f .
2. Déterminer $f([-3; 1])$.
3. Déterminer $f([-5; -2])$.
4. Déterminer $f([2; 6])$.

Exercice 10 – Carré translaté : variation par construction

On considère $f(x) = 3(x - 2)^2 - 4$.

1. Expliquer pourquoi f est décroissante sur $] -\infty; 2]$.
2. Expliquer pourquoi f est croissante sur $[2; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Donner le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 – Démontrer une variation par différence

On considère $g(x) = 3x^2 + 12x + 1$.

1. Soient $a < b \leq -2$. Factoriser $g(b) - g(a)$ et déterminer son signe.
2. En déduire le sens de variation de g sur $] -\infty; -2]$.
3. Faire de même pour $-2 \leq a < b$.
4. Construire le tableau de variation de g .

Exercice 12 – Fonction inverse : variations et images d'intervalles

On considère $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Rappeler son domaine et son tableau de variation.
2. Déterminer $h([2; 6])$.
3. Déterminer $h([-6; -2])$.
4. Comparer $h(-5)$ et $h(-3)$, puis $h(2)$ et $h(7)$.

Exercice 13 – Inverse d'une affine : étude par composition

On considère $p(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Étudier les variations sur $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.
3. Déterminer l'image de $[2; 6]$.
4. Comparer $p(3)$ et $p(5)$.

Exercice 14 – Fonction cube : variations et encadrements

On considère $c(x) = x^3$.

1. Construire le tableau de variation de c .
2. Déterminer $c([-2; 3])$.
3. Résoudre $-8 < x^3 < 27$.
4. Comparer $(-1,5)^3$ et 2^3 sans développer complètement.

Exercice 15 – Fonction racine carrée : domaine, variations, image

On considère $r(x) = \sqrt{x}$.

1. Donner le domaine et le sens de variation.
2. Déterminer $r([4; 25])$.
3. Résoudre $2 \leq \sqrt{x} \leq 5$.
4. Comparer $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$.

Exercice 16 – Valeur absolue : minimum et maximum

On considère $v(x) = |x - 2|$ sur $[-3; 6]$.

1. Étudier les variations de v .
2. Donner son minimum et l'abscisse où il est atteint.
3. Donner son maximum sur $[-3; 6]$.
4. Déterminer l'image de $[-3; 6]$.

Exercice 17 – Fonction définie par morceaux

On définit h sur $[-4; 4]$ par $h(x) = -x - 1$ si $x \in [-4; 0]$, et $h(x) = x^2 - 1$ si $x \in [0; 4]$.

x	-4	0	4
h	3	-1	15

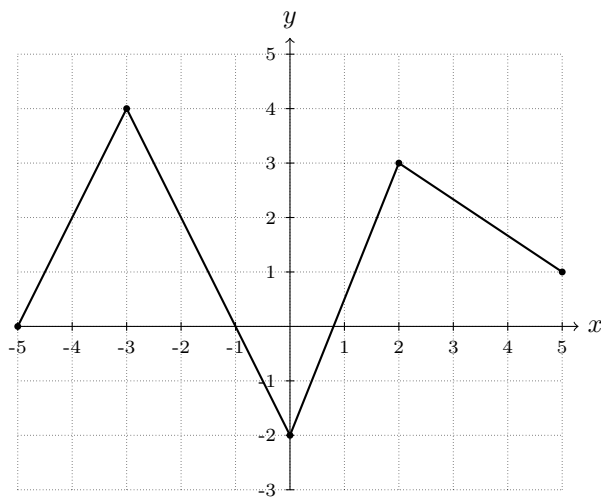
1. Étudier les variations sur chaque morceau.
2. Construire le tableau de variation complet.

3. Donner le minimum et le maximum sur $[-4; 4]$.

4. Résoudre $h(x) \leq 0$.

Exercice 18 – Exploitation graphique I : variations et extremums

On considère la courbe polygonale ci-dessous, définie sur $[-5; 5]$.



1. Donner les intervalles de croissance et de décroissance.

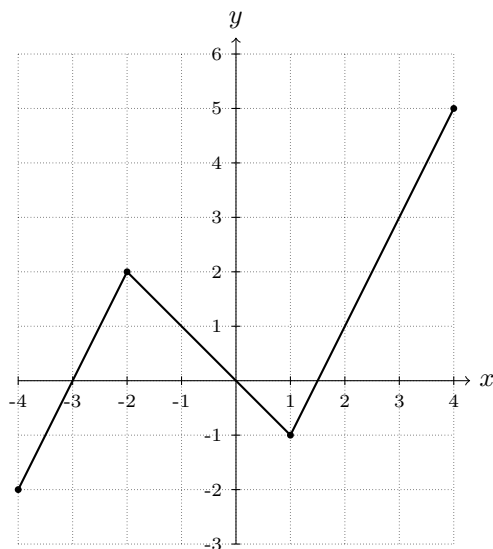
2. Donner le maximum et le minimum globaux.

3. Comparer $f(-4)$ et $f(-2)$.

4. Comparer $f(1)$ et $f(4)$.

Exercice 19 – Exploitation graphique II : équations et inéquations

La courbe ci-dessous est formée de segments et représente g sur $[-4; 4]$.



1. Résoudre graphiquement $g(x) = 0$.

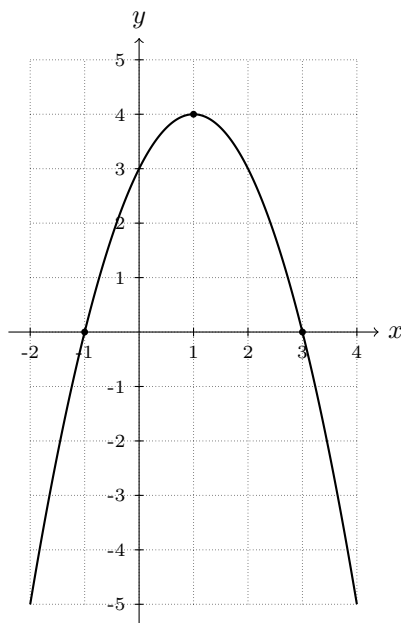
2. Résoudre $g(x) \geq 0$.

3. Donner le maximum et le minimum de g .

4. Donner les intervalles de variation.

Exercice 20 – Exploitation graphique III : parabole et tableau

On considère $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ sur $[-2; 4]$, représentée ci-dessous.



1. Lire puis justifier le sens de variation.
2. Donner le maximum et le minimum sur l'intervalle.
3. Résoudre $f(x) = 0$.
4. Déterminer l'image de $[-2; 4]$.

Exercice 21 – Tableau de variation et nombre de solutions

La fonction u est supposée continue et strictement monotone sur chacun des trois intervalles du tableau.

x	-6	-2	3	8
u	-5	4	-1	6

1. Combien de solutions l'équation $u(x) = 0$ possède-t-elle sur $[-6; 8]$?
2. Combien de solutions pour $u(x) = 5$?
3. Combien de solutions pour $u(x) = 7$?
4. Combien de solutions pour $u(x) = -3$?

Exercice 22 – Tableau de variation et résolution avec une abscisse inconnue

On suppose f continue et strictement monotone sur chaque morceau du tableau. On note α l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $] -1; 4[$.

x	-5	-1	4	7
f	1	6	-2	0

1. Justifier l'existence et l'unicité de α .
2. Résoudre $f(x) \geq 0$ sur $[-5; 7]$.
3. Donner le maximum et le minimum globaux.
4. Peut-on comparer $f(2)$ et $f(6)$ avec le seul tableau ?

Exercice 23 – Image d'un intervalle à partir d'un tableau

On reprend une fonction f , continue sur $[-4; 6]$, dont le tableau est donné ci-dessous.

x	-4	1	6
f	-2	5	0

1. Déterminer $f([-4; 1])$.
2. Déterminer $f([1; 6])$.
3. Déterminer $f([-4; 6])$.
4. Que peut-on dire de $f([0; 4])$ sans connaître $f(0)$ ni $f(4)$?

Exercice 24 – Optimisation : rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 40 cm. Si un côté mesure x cm, l'autre mesure $20 - x$ cm, avec $0 \leq x \leq 20$. Son aire est $A(x) = x(20 - x)$.

1. Mettre $A(x)$ sous forme canonique.
2. Étudier les variations de A sur $[0; 20]$.
3. Déterminer l'aire maximale et les dimensions correspondantes.

Exercice 25 – Optimisation sous contrainte

On reprend $A(x) = x(20 - x) = 100 - (x - 10)^2$, mais on impose $4 \leq x \leq 8$.

1. Quel est le sens de variation de A sur $[4; 8]$?
2. Déterminer le minimum sur $[4; 8]$.
3. Déterminer le maximum sur $[4; 8]$.

Exercice 26 – Optimisation géométrique : enclos

On dispose de 24 m de grillage pour trois côtés d'un rectangle adossé à un mur. Si les deux côtés perpendiculaires au mur mesurent x , le troisième mesure $24 - 2x$. L'aire vaut $S(x) = x(24 - 2x)$, pour $0 \leq x \leq 12$.

1. Mettre $S(x)$ sous forme canonique.
2. Étudier les variations de S .
3. Donner l'aire maximale et les dimensions de l'enclos.

Exercice 27 – Modélisation : hauteur d'un projectile

La hauteur d'un projectile, en mètres, est modélisée sur $[0; 4]$ par $h(t) = -5(t - 2)^2 + 20$.

1. Étudier les variations de h .
2. À quel instant la hauteur est-elle maximale ? Quelle est cette hauteur ?
3. Résoudre $h(t) \geq 15$.

Exercice 28 – Modélisation : bénéfice maximal

Le bénéfice d'une entreprise est modélisé sur $[0; 30]$ par $B(x) = -2(x - 15)^2 + 450$, où x est le nombre de centaines d'objets vendus.

1. Étudier les variations de B .
2. Déterminer le bénéfice maximal et pour quelle valeur de x il est atteint.
3. Comparer $B(10)$ et $B(20)$ sans développer.

Exercice 29 – Comparaisons fines avec fonctions usuelles

On suppose $0 < a < b < 1$.

1. Comparer a^2 et b^2 .
2. Comparer a^3 et b^3 .
3. Comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
4. Comparer, pour un même $x \in]0; 1[$, les trois nombres x^2 , x et $\sqrt{x}$.

Exercice 30 – Bilan final : tableau, extremums, équations et encadrements

On suppose u continue et strictement monotone sur chacun des morceaux du tableau.

x	-6	-2	3	8
u	-5	4	-1	6

1. Donner les intervalles de croissance et de décroissance.
2. Donner le maximum et le minimum globaux.
3. Combien de solutions l'équation $u(x) = 0$ possède-t-elle ?
4. On note $\beta \in]3; 8[$ l'unique solution de $u(x) = 4$. Résoudre $u(x) \geq 4$.