

Probabilités - Seconde

30 exercices - édition élève

Exercice 1 - Dé équilibré — événements, contraire, réunion/intersection (pièges de langage)

On lance un dé équilibré (faces 1 à 6). On note $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définir les événements suivants puis calculer leur probabilité :

- (a) A : « obtenir un multiple de 2 ».
- (b) B : « obtenir un nombre ≥ 5 ».
- (c) $A \cap B$ et $A \cup B$, puis $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
- (d) Calculer $P(\overline{A \cup B})$ puis décrire l'événement $\overline{A \cup B}$.

Exercice 2 - Deux dés — couples, somme, réunion/intersection (double comptage)

On lance deux dés équilibrés. Une issue est un couple $(i; j)$ avec $i \in \{1..6\}$, $j \in \{1..6\}$. Donc $|\Omega| = 36$.

On définit :

- S : « la somme vaut 7 »
- D : « les deux dés donnent le même nombre (double) »
- P : « le produit des résultats est pair »

- (a) Déterminer $P(S)$.
- (b) Déterminer $P(D)$.
- (c) Déterminer $P(S \cup D)$ en expliquant pourquoi il faut (ou non) enlever l'intersection.
- (d) Déterminer $P(P)$ le plus vite possible, sans lister 36 couples.

Exercice 3 - Cartes — cœur/figure/rouge : formules + intersection (piège du “ou”)

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes (sans joker). Toutes les cartes sont équiprobables.

On note :

- C : « la carte est un cœur »
- F : « la carte est une figure (V, D, R) »
- R : « la carte est rouge (cœur ou carreau) »

- (a) Calculer $P(C)$, $P(F)$, $P(R)$.
- (b) Calculer $P(C \cap F)$ puis $P(C \cup F)$.
- (c) Calculer $P(R \cap F)$ puis $P(R \cup F)$.
- (d) Calculer $P(\overline{R \cup F})$ et interpréter.

Exercice 4 - Urne — événement contraire + réunion/intersection (comptage propre)

Une urne contient 6 boules rouges (R), 4 bleues (B) et 2 vertes (V). On tire une boule au hasard.

On note :

- A : « tirer une rouge »
- E : « tirer une boule rouge ou bleue »
- V : « tirer une verte »

- (a) Calculer $P(A)$, $P(V)$, $P(E)$.

2. (b) Décrire $\overline{E}$ et calculer $P(\overline{E})$.
3. (c) Calculer $P(A \cup V)$ et $P(A \cap V)$.
4. (d) Calculer $P(E \cap A)$ puis interpréter la réponse.

Exercice 5 - Deux tirages — avec remise vs sans remise (comparaison ultra piègeuse)

Une urne contient 5 boules noires (N) et 3 boules blanches (B). On effectue **deux tirages**.

On étudie deux expériences :

- **Expérience 1** : tirages **avec remise**.
 - **Expérience 2** : tirages **sans remise**.
1. (a) Avec remise : calculer $P(N \text{ puis } B)$.
 2. (b) Sans remise : calculer $P(N \text{ puis } B)$.
 3. (c) Dans chaque expérience, calculer $P(\text{deux boules de même couleur})$.
 4. (d) Expliquer en 2 phrases pourquoi les réponses changent (ou pas) selon remise / sans remise.

Exercice 6 - Série d'essais — « au moins un » (méthode du contraire obligatoire)

On lance une pièce équilibrée (Pile/Face). Les lancers sont indépendants.

1. (a) En 4 lancers, calculer la probabilité d'obtenir **au moins une** fois Pile.
2. (b) En 4 lancers, calculer la probabilité d'obtenir **exactement** 3 fois Pile.
3. (c) En 6 lancers, calculer la probabilité d'obtenir **aucune** fois Face.
4. (d) (piège) En 6 lancers, calculer la probabilité d'obtenir **au plus** une fois Face.

Exercice 7 - Données de probabilités — retrouver intersection / réunions (niveau tableau de Venn)

On considère deux événements A et B dans un univers Ω . On connaît :

- $P(A) = \frac{3}{5}$
 - $P(B) = \frac{1}{2}$
 - $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
1. (a) Calculer $P(A \cup B)$.
 2. (b) Calculer $P(A \setminus B)$ (c.-à-d. « A mais pas B »).
 3. (c) Calculer $P(\overline{A \cup B})$.
 4. (d) Calculer $P(\overline{A} \cap B)$ (c.-à-d. « B mais pas A ») puis vérifier la cohérence (sommes = 1).

Exercice 8 - Entiers 1 à 60 — événements « divisible par » (inclusion-exclusion)

On choisit au hasard un entier dans $\{1, 2, \dots, 60\}$ (tous équiprobables).

On définit :

- A : « divisible par 4 »
- B : « divisible par 6 »

1. (a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. (b) Calculer $P(A \cap B)$.

3. (c) Calculer $P(A \cup B)$.
4. (d) Calculer $P(\overline{A \cup B})$ et donner une interprétation simple.

Exercice 9 - Contrôle qualité — défauts A/B, réunion/intersection (très réaliste)

Dans une usine, on teste une pièce choisie au hasard. On note :

- A : « la pièce a un défaut d'assemblage »
- B : « la pièce a un défaut de peinture »

On sait que :

- $P(A) = 0,08$
- $P(B) = 0,11$
- $P(A \cap B) = 0,03$

1. (a) Calculer $P(A \cup B)$ (au moins un défaut).
2. (b) Calculer la probabilité qu'une pièce soit **parfaite** (aucun défaut).
3. (c) Calculer la probabilité « défaut d'assemblage **seul** » (A mais pas B).
4. (d) Sur 1 000 pièces, estimer le nombre de pièces parfaites si la fréquence observée est proche du modèle.

Exercice 10 - Challenge final — mix : 2 dés + contraire + réunion (niveau 20/20)

On lance deux dés équilibrés. $|\Omega| = 36$ couples $(i; j)$.

On définit :

- A : « la somme est ≥ 10 »
- B : « au moins un des deux dés montre 6 »

1. (a) Calculer $P(A)$ en comptant les couples favorables.
2. (b) Calculer $P(B)$ en utilisant le contraire.
3. (c) Calculer $P(A \cap B)$.
4. (d) Calculer $P(A \cup B)$ et vérifier la cohérence (résultat entre 0 et 1).

Exercice 11 - Loi de probabilité — compléter et combiner des événements

Une expérience aléatoire possède quatre issues A, B, C, D . On connaît :

- $P(A) = 0,18$
- $P(B) = 0,27$
- $P(C) = x$
- $P(D) = 0,22$

1. (a) Déterminer x .
2. (b) Calculer $P(B \cup D)$.
3. (c) Calculer $P(\overline{C})$.
4. (d) Calculer la probabilité de l'événement $E = \{B, C\}$.

Exercice 12 - Simulation — fréquence et stabilisation

Un modèle attribue à un succès la probabilité $p = 0,35$. Trois simulations donnent :

Nombre d'essais	Succès	Fréquence
50	22	à calculer
500	181	à calculer
5 000	1 764	à calculer

- (a) Calculer les trois fréquences.
- (b) Calculer, pour chacune, l'écart absolu à 0,35.
- (c) Quelle simulation est la plus proche du modèle ?
- (d) Quelle observation générale peut-on faire lorsque le nombre d'essais augmente ?

Exercice 13 - Tableau croisé — fréquence marginale et fréquence conditionnelle

On choisit au hasard un élève parmi les 200 élèves du tableau.

	Sport	Pas sport	Total
Interne	52	28	80
Externe	48	72	120
Total	100	100	200

On note I : « l'élève est interne » et S : « l'élève pratique un sport ».

- (a) Calculer $P(S)$.
- (b) Calculer $P_I(S)$.
- (c) Calculer $P_S(I)$.
- (d) Expliquer pourquoi les résultats de (b) et (c) ne répondent pas à la même question.

Exercice 14 - Inversion des conditionnements — ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$

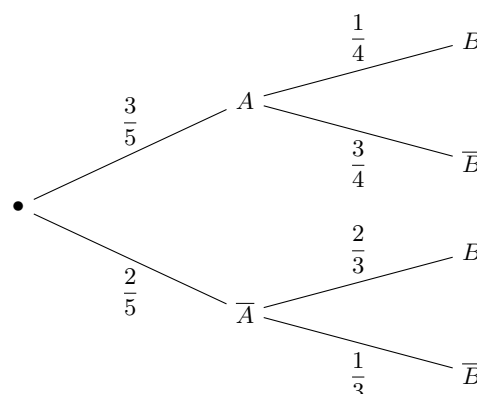
On choisit un individu au hasard dans le tableau.

	B	non B	Total
A	50	30	80
non A	50	70	120
Total	100	100	200

- (a) Calculer $P(A \cap B)$.
- (b) Calculer $P_A(B)$.
- (c) Calculer $P_B(A)$.
- (d) Calculer $P(A \cup B)$ et comparer les deux probabilités conditionnelles obtenues.

Exercice 15 - Arbre pondéré — lire et calculer la probabilité d'un chemin

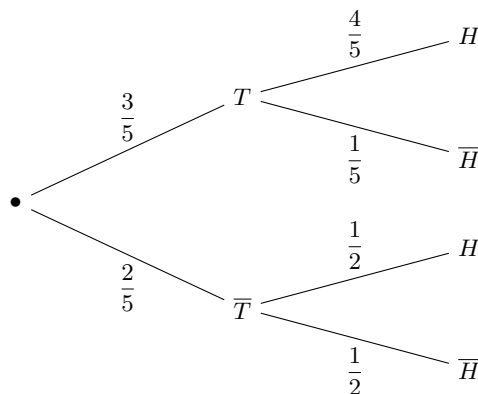
On considère l'arbre pondéré suivant.



1. (a) Vérifier les probabilités des branches complémentaires.
2. (b) Calculer $P(A \cap B)$.
3. (c) Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.
4. (d) Parmi ces deux chemins menant à B , lequel est le plus probable et de combien ?

Exercice 16 - Situation concrète — construire et exploiter un arbre pondéré

Pour un trajet, 60% des voyageurs prennent le train. Parmi ceux qui prennent le train, 80% arrivent à l'heure. Parmi ceux qui ne prennent pas le train, 50% arrivent à l'heure.



On note T : « prendre le train » et H : « arriver à l'heure ».

1. (a) Justifier les six pondérations de l'arbre.
2. (b) Calculer $P(T \cap H)$.
3. (c) Calculer $P(\overline{T} \cap \overline{H})$.
4. (d) Comparer les probabilités de ces deux chemins.

Exercice 17 - Arbre incomplet — retrouver une pondération manquante

Un arbre vérifie $P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,60$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,25$.

1. (a) Calculer $P(\overline{A})$.
2. (b) Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.
3. (c) Calculer $P(A \cap B)$.
4. (d) Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 18 - Test diagnostique — sensibilité, faux positifs et inversion

On choisit au hasard une personne dans le tableau.

	Test +	Test -	Total
Malade	72	8	80
Non malade	46	874	920
Total	118	882	1 000

On note M : « malade » et $+$: « test positif ».

1. (a) Calculer la sensibilité $P_M(+)$.
2. (b) Calculer la fréquence des faux positifs $P_{\overline{M}}(+)$.
3. (c) Calculer la spécificité $P_{\overline{M}}(-)$.

4. (d) Calculer $P_+(M)$ et comparer avec la sensibilité.

Exercice 19 - Tableau incomplet — reconstruire les effectifs à partir d'une fréquence conditionnelle

Une population contient 240 individus. On sait que $|A| = 96$, $|B| = 150$ et $P_A(B) = \frac{5}{8}$.

	B	non B	Total
A	à trouver	à trouver	96
non A	à trouver	à trouver	144
Total	150	90	240

- (a) Compléter les quatre cellules intérieures du tableau.
- (b) Calculer $P_B(A)$.
- (c) Calculer $P(A \cup B)$.
- (d) Calculer la probabilité de n'appartenir ni à A ni à B .

Exercice 20 - Tirages sans remise — probabilité conditionnelle au second tirage

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire successivement deux boules **sans remise**.

- (a) Calculer la probabilité de tirer une rouge au premier tirage.
- (b) Sachant que la première boule est rouge, calculer la probabilité de tirer ensuite une bleue.
- (c) Calculer la probabilité du chemin « rouge puis bleue ».
- (d) Calculer la probabilité du chemin « bleue puis rouge » et comparer.

Exercice 21 - Avec remise / sans remise — mesurer l'effet sur les probabilités

Une urne contient 4 boules rouges et 6 bleues. On effectue deux tirages.

- (a) Avec remise, calculer la probabilité de tirer deux rouges.
- (b) Sans remise, calculer la probabilité de tirer deux rouges.
- (c) Avec remise, calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
- (d) Sans remise, calculer la même probabilité et comparer.

Exercice 22 - Deux dés — contraire et inclusion d'événements

On lance deux dés équilibrés. On note A : « au moins un résultat est pair » et B : « la somme vaut 5 ».

- (a) Calculer $P(A)$ en utilisant le contraire.
- (b) Calculer $P(B)$.
- (c) Montrer que $B \subset A$.
- (d) En déduire $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

Exercice 23 - Jeu de 32 cartes — exactement un roi en deux tirages

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 rois et 28 cartes qui ne sont pas des rois. On tire deux cartes successivement sans remise.

- (a) Calculer la probabilité « roi puis non-roi ».
- (b) Calculer la probabilité « non-roi puis roi ».
- (c) En déduire la probabilité d'obtenir exactement un roi.

4. (d) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi par la méthode du contraire.

Exercice 24 - Loi des grands nombres — interpréter une stabilisation

Pour un phénomène, on envisage le modèle $p = 0,45$. Des simulations donnent les fréquences suivantes :

n	50	200	1 000	5 000
Fréquence	0,42	0,47	0,455	0,451

- (a) Calculer l'écart absolu à 0,45 pour chaque fréquence.
- (b) Ces observations sont-elles compatibles avec une stabilisation autour de 0,45 ?
- (c) Peut-on conclure que la probabilité réelle est exactement 0,45 ?
- (d) Dans le modèle proposé, quelle est la probabilité de l'événement contraire ?

Exercice 25 - Simulation Python — repérer et corriger une erreur de fréquence

Le programme suivant doit simuler une fréquence de succès de probabilité 0,3 :

```
s = 0
for k in range(n):
    if random() < 0.3:
        s = s + 1
return n/s
```

- (a) Expliquer le rôle de la condition `random() < 0.3`.
- (b) Identifier l'erreur de la dernière ligne.
- (c) Donner la ligne correcte.
- (d) Si $n = 500$ et $s = 147$, calculer la fréquence renvoyée par la version corrigée.

Exercice 26 - Contrôle qualité — probabilités conditionnelles sur deux défauts

Une pièce est choisie au hasard parmi 400 pièces contrôlées.

	Défaut peinture	Pas défaut peinture	Total
Défaut assemblage	30	40	70
Pas défaut assemblage	70	260	330
Total	100	300	400

On note A : « défaut d'assemblage » et B : « défaut de peinture ».

- (a) Calculer $P(A \cap B)$.
- (b) Calculer $P_A(B)$.
- (c) Calculer $P_B(A)$.
- (d) Calculer la probabilité qu'une pièce n'ait aucun des deux défauts.

Exercice 27 - Langage naturel et probabilités conditionnelles

Dans un service numérique, 60% des utilisateurs se connectent principalement sur mobile. Parmi les utilisateurs mobiles, 35% utilisent une offre Premium.

On note M : « mobile » et P : « Premium ».

- (a) Traduire les deux informations sous forme $P(M)$ et $P_M(P)$.
- (b) Calculer $P(M \cap P)$.
- (c) Une étude supplémentaire donne $P_P(M) = 0,70$. Comparer $P_M(P)$ et $P_P(M)$.

4. (d) Sur 1 000 utilisateurs, combien le modèle associe-t-il au chemin « mobile et Premium » ?

Exercice 28 - Arbre algébrique — retrouver une probabilité à partir d'une intersection

Dans un arbre, on sait que $P(A) = x$, $P_A(B) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{9}{25}$.

1. (a) Écrire l'équation reliant x aux données.
2. (b) Déterminer $x = P(A)$.
3. (c) En déduire $P(\overline{A})$.
4. (d) Calculer $P(A \cap \overline{B})$.

Exercice 29 - Réunion, intersection et parties exclusives — synthèse

Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0,62$, $P(B) = 0,48$ et $P(A \cap B) = 0,25$.

1. (a) Calculer $P(A \cup B)$.
2. (b) Calculer $P(A \setminus B)$.
3. (c) Calculer $P(B \setminus A)$.
4. (d) Calculer la probabilité de n'être ni dans A ni dans B , puis vérifier que les quatre zones d'un diagramme de Venn totalisent 1.

Exercice 30 - Challenge final — filtre anti-phishing et inversion des conditionnements

On analyse 2 000 courriels avec un filtre anti-phishing.

	Filtre +	Filtre -	Total
Phishing	180	20	200
Légitime	90	1 710	1 800
Total	270	1 730	2 000

On note P : « courriel de phishing » et $+$: « filtre déclenché ».

1. (a) Calculer $P(P)$.
2. (b) Calculer $P_P(+)$, la sensibilité du filtre.
3. (c) Calculer $P_{\overline{P}}(+)$, la fréquence des faux positifs.
4. (d) Calculer $P_+(P)$ puis expliquer pourquoi ce résultat n'est pas égal à celui de (b).