2^{nde} – Nombres réels et inégalités

1 Les ensembles de nombres

En Seconde, on manipule plusieurs ensembles de nombres usuels :

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (par exemple $0, 1, 2, 3, \dots$) ;
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs (nombres entiers positifs, négatifs ou nuls : $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) ;
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux (écriture avec un nombre fini de chiffres après la virgule, comme $2,5$ ou $-3,14$) ;
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels (écriture sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) ;
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels. Il contient tous les nombres précédents (rationnels) mais aussi des nombres comme $\sqrt{2}$, π, e, etc., qui ne sont pas rationnels.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemples.

- $5 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$;
- $-3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $\frac{7}{4} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités

Sur la **droite graduée**, chaque point correspond à un nombre réel, et inversement. Plus un nombre est grand, plus le point associé est à droite.
Pour comparer deux réels a et b, on utilise les symboles :

- $a < b$: « a est strictement inférieur à b » ;
- $a \leq b$: « a est inférieur ou égal à b » ;
- $a > b$: « a est strictement supérieur à b » ;
- $a \geq b$: « a est supérieur ou égal à b ».

Une **inégalité** est une phrase mathématique qui compare deux expressions et décrit un ensemble de solutions (un ensemble de réels).

3 Intervalles de réels

3.1 Intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On définit :

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: intervalle **fermé** ;
- $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: intervalle **ouvert** ;
- $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: fermé en a, ouvert en b ;

— $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: ouvert en a, fermé en b.

Exemple : $[-2;4]$ est l'ensemble des réels compris entre -2 et 4, bornes incluses.

3.2 Intervalles non bornés

Pour décrire des intervalles « qui vont à l'infini », on utilise les symboles $-\infty$ et $+\infty$:

— $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$;

— $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$;

— $]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$;

— $]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

Attention. $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres : on ne calcule pas avec. Ils servent uniquement à décrire des intervalles non bornés.

4 Valeur absolue et distance

4.1 Valeur absolue

La **valeur absolue** d'un réel x, notée $|x|$, est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine 0 sur la droite graduée :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples : $|5| = 5, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0.$

4.2 Distance entre deux réels

La **distance** entre deux réels a et b est définie par :

$$d(a,b) = |b-a|.$$

Exemples :

— $d(2,7) = |7-2| = 5$;

— $d(-3,4) = |4-(-3)| = 7$;

— $d(-1{,}5,\ 2{,}5) = |2{,}5-(-1{,}5)| = 4$;

— $d(-4,-1) = |-1-(-4)| = 3$.

4.3 Intervalles centrés

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. L'ensemble des réels à distance au plus r de a se note :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\} = [a-r\,;a+r].$$

Exemple : $|x-3| \leq 2$ est équivalent à $x \in [1;5]$.

5 Inégalités et écriture des solutions

Résoudre une inégalité (par exemple $2 \leq x < 5$) revient à déterminer l'ensemble des réels x qui la vérifient. On exprime alors la solution :

— sur la droite graduée (représentation graphique) ;

— sous forme d'intervalle (écriture symbolique).

Exemples.

— L'inégalité $2 \leq x < 5$ a pour ensemble de solutions $[2;5[$.

— L'inégalité $x \geq -1$ a pour ensemble de solutions $[-1;+\infty[$.