2^{nde} — Généralités sur les fonctions

Cours

1. Définition, notation et vocabulaire

Une **fonction numérique** (ou simplement « fonction ») est une relation qui, à chaque réel x d'un ensemble D (appelé **ensemble de définition**), associe un **unique** réel noté $f(x)$.
On note souvent :

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x).$$

— $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f ;
— x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f.

Exemple. Si $f(x) = 3x^2+1$, alors $f(2) = 13$. On dit que *13 est l'image de 2 par f* et que *2 est un antécédent de 13*.

2. Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens.

— Pour un polynôme, par exemple $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$, la fonction est définie pour tout réel :

$$D_f = \mathbb{R}.$$

— Pour une fraction, par exemple $g(x) = \dfrac{5-2x}{3x+2}$, on exclut les valeurs qui annulent le dénominateur : ici $3x + 2 \neq 0$, donc $x \neq -\dfrac{2}{3}$ et

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

— Pour une racine carrée, par exemple $h(x) = \sqrt{x-1}$, on impose que l'intérieur de la racine soit positif ou nul : $x - 1 \geq 0$, donc

$$D_h = [1; +\infty[.$$

On écrira par exemple : « f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ », ou « f est définie sur $[0; +\infty[$ », etc.

3. Courbe représentative d'une fonction

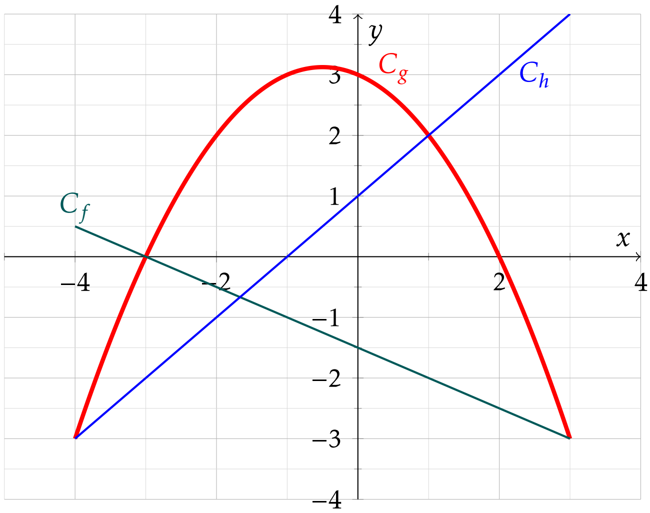
Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f. Dans un repère, la **courbe représentative** de f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.
L'égalité

$$y = f(x)$$

est appelée **équation de la courbe**.

4. Exemple graphique : comparer trois fonctions

Sur la figure ci-dessous, on a représenté trois fonctions sur le même repère : la droite verte C_f, la parabole rouge C_g et la droite bleue C_h.



Notations :

— C_f est la courbe de la fonction f (droite verte décroissante) ;
— C_g est la courbe de la fonction g (parabole rouge) ;
— C_h est la courbe de la fonction h (droite bleue).

a) Résoudre graphiquement $g(x) > 2$ et $g(x) \geq 2$

On trace mentalement la droite horizontale d'ordonnée 2 et on regarde où la **parabole rouge** C_g est au-dessus ou sur ce niveau.
La parabole coupe la droite $y = 2$ en deux points d'abscisses -1 et 1.
Ainsi :

$$g(x) > 2 \text{ pour } x \in]-1;1[, \qquad g(x) \geq 2 \text{ pour } x \in [-1;1].$$

b) Signe de f, g et h

Fonction f (droite verte).

— $f(x) = 0$ pour une unique valeur (intersection avec l'axe des abscisses), lisible sur le dessin (environ $x \simeq -1{,}5$).
— Pour x plus petit que cette valeur, la droite est au-dessus de l'axe : $f(x) > 0$. Pour x plus grand, la droite est en dessous : $f(x) < 0$.

Fonction g (parabole rouge).

— $g(x) = 0$ pour deux valeurs (les intersections avec l'axe des abscisses).
— Entre ces deux abscisses, la parabole est au-dessus de l'axe : $g(x) > 0$. En dehors, elle est en dessous : $g(x) < 0$.

Fonction h (droite bleue).

— La droite passe par l'origine et est croissante : $h(x) < 0$ pour $x < 0$ et $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

c) Interpréter des égalités et inégalités entre f, g et h

— $f(x) = g(2)$ signifie que les points de C_f ont la même ordonnée que le point de C_g d'abscisse 2.
— $f(x) = h(x)$: on cherche les abscisses des points d'intersection de C_f et C_h.
— $g(x) > f(x)$: la courbe rouge est au-dessus de la courbe verte.
— $g(x) = h(x)$: les points communs à C_g et C_h donnent les solutions.

5. Fonctions paire et impaire

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- f est **paire** si, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est **impaire** si, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

6. Signe d'une fonction

On dit que f est **positive** sur un ensemble D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq 0$, et **négative** sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq 0$. On résume souvent le signe dans un **tableau de signes**.

7. Variations et extremums

Soit f définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ pour tous $a, b \in I$.
- f est **décroissante** sur I si $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

On représente souvent ces informations dans un **tableau de variations** et on repère les **minimums** et **maximums** (valeurs extrêmes prises par f sur un intervalle donné).