

2^{nde} — Fonctions : généralités

Exercice 1 — Quotient rationnel — domaine, images et antécédents

**

1. On considère $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$. Déterminer son domaine D_f .
2. Calculer exactement $f(0)$ et $f(2)$.
3. Déterminer l'antécédent de 1 par f .
4. Résoudre sur D_f l'équation $f(x) = 3$.

Exercice 2 — Racine et quotient — domaine puis équation avec contrôle

**

1. On définit $g(x) = \frac{\sqrt{5-2x}}{x-1}$. Déterminer D_g en notation française d'intervalles.
2. Calculer $g(0)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$.
3. Déterminer l'antécédent de 0 par g .
4. Résoudre sur D_g l'équation $g(x) = 1$.

Exercice 3 — Valeur absolue — antécédents et intervalle solution

**

1. On pose $h(x) = |2x-3| - 1$. Calculer $h(0)$, $h(2)$ et $h\left(\frac{3}{2}\right)$.
2. Déterminer l'unique antécédent de -1 .
3. Déterminer tous les antécédents de 3.
4. Résoudre $h(x) \leq 1$ et donner la réponse en intervalle.

Exercice 4 — Fonction définie par morceaux — lecture graphique

**

On définit la fonction p par :

$$p(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -4 \leq x \leq 1, \\ 5-x & \text{si } 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

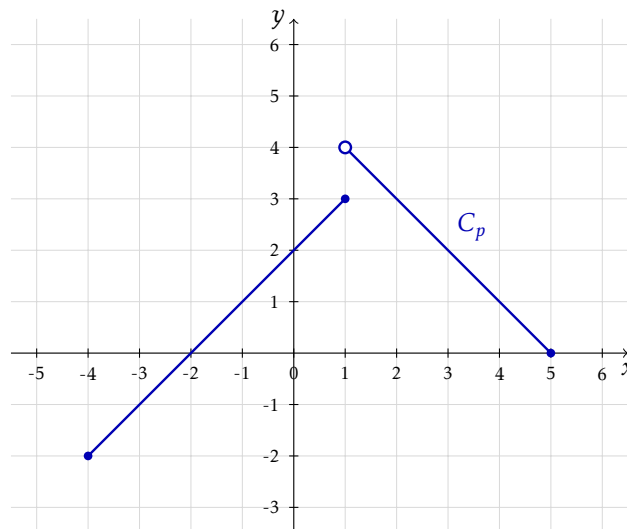


FIGURE 1 : Fonction p définie par morceaux : point plein inclus, point creux exclu.

1. Donner le domaine D_p et expliquer le rôle des points plein/creux en $x = 1$.
2. Calculer $p(-3)$, $p(1)$ et $p(4)$, puis vérifier graphiquement.
3. Déterminer tous les antécédents de 0.
4. Résoudre $p(x) \geq 2$ sur D_p , d'abord par calcul puis par lecture graphique.

Exercice 5 — Tableau symétrique — conjecture d’une expression

**

Une fonction u est connue par le tableau suivant.

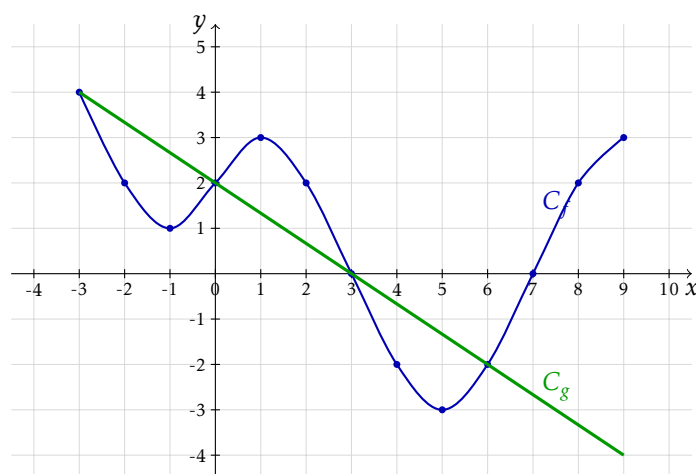
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$u(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

1. Relever les symétries du tableau et conjecturer une propriété de u .
2. On suppose désormais que $u(x) = x^2 - 3$. Vérifier que cette expression reproduit toutes les valeurs du tableau.
3. Déterminer exactement les antécédents de 1 et de 6 sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre $u(x) \leq 1$ et donner la solution en notation française d’intervalle.

Exercice 6 — lecture graphique

**

On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous. Le repère utilise la même échelle sur les deux axes.

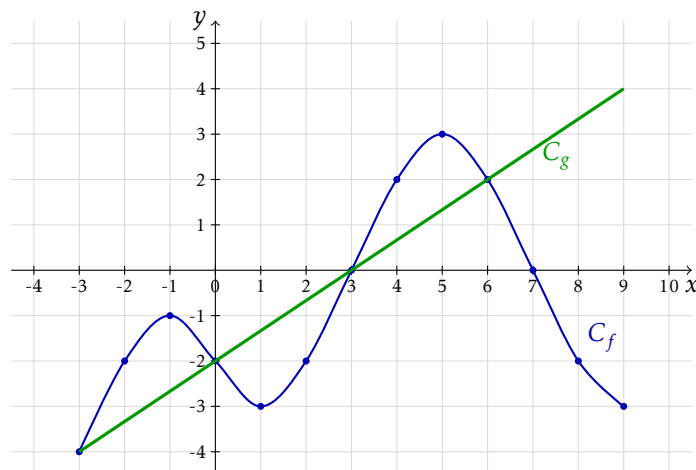


1. a) Lire $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$. b) À partir de $(-3; 4)$ et $(9; -4)$, déterminer l’expression de g .
2. Déterminer les antécédents de 0, 2 et 3 par f , puis résoudre graphiquement $f(x) = 1$.
3. Sur $[-3; 9]$, résoudre $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 2$.
4. Dresser les tableaux de signes et de variations de f . Donner minimum, maximum et encadrements sur $[-3; 1]$, $[1; 9]$, $[-3; 9]$.

Exercice 7 — lecture graphique, comparaison et variations

**

On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous. Le repère utilise la même échelle sur les deux axes.



1. a) Lire $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$. b) À partir de $(-3; -4)$ et $(9; 4)$, déterminer l’expression de g .
2. Déterminer les antécédents de 0, 2 et 3 par f , puis résoudre graphiquement $f(x) = -2$.

3. Sur $[-3; 9]$, résoudre $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq 0$ et $f(x) \geq -2$.
4. Dresser les tableaux de signes et de variations de f . Donner minimum, maximum et encadrements sur $[-3; 1]$, $[1; 9]$, $[-3; 9]$.

Exercice 8 — Tableau de variations — lecture raisonnée et comparaisons

**

On donne le tableau de variations d'une fonction f continue sur $[-4; 7]$ et strictement monotone sur chacun des intervalles indiqués.

x	-4	-1	3	7
f	1	6	-4	0

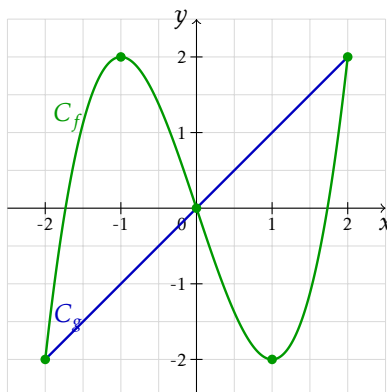
Diagramme de variation : une flèche pointe de 1 à 6, une autre de 6 à -4, et une dernière de -4 à 0.

1. a) Déterminer $f(3)$. b) Déterminer l'antécédent de 6.
2. a) Donner le nombre de solutions de $f(x) = 2$. b) Donner le nombre de solutions de $f(x) = -2$.
3. a) Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$. b) Comparer $f(1)$ et $f(2)$.
4. a) Peut-on comparer $f(2)$ et $f(6)$? b) Comparer $f(-2)$ et $f(5)$ en utilisant les plages de valeurs des deux branches.

Exercice 9 — Fonction cubique et droite — étude graphique avancée

**

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on considère $f(x) = x^3 - 3x$ et $g(x) = x$ sur $[-2; 2]$.



1. a) Lire $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$. b) Le nombre 3 possède-t-il un antécédent par f sur $[-2; 2]$?
2. Résoudre graphiquement $f(x) \leq 1$ et $f(x) \leq 0$. Donner les abscisses non entières à 10^{-2} près.
3. Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$, puis vérifier algébriquement avec $f(x) - g(x)$.
4. Dresser les tableaux de variations et de signes de f sur $[-2; 2]$, puis déterminer son maximum et toutes les abscisses où il est atteint.

Exercice 10 — Distance à deux points

**

1. On pose $H(x) = |x + 2| + |x - 3|$. Calculer $H(-2)$, $H(0)$ et $H(3)$.
2. Déterminer la valeur minimale de H et l'ensemble des abscisses où elle est atteinte.
3. Résoudre $H(x) = 9$.
4. Résoudre $H(x) \leq 7$.

Exercice 11 — Forme canonique d'une parabole

**

1. On considère $q(x) = x^2 - 4x + 3$. Montrer que $q(x) = (x - 2)^2 - 1$.
2. En déduire le minimum de q et l'abscisse où il est atteint.
3. Déterminer les antécédents de 0.
4. Résoudre $q(x) \leq 0$.

Exercice 12 — Fonction racine

**

1. On définit $r(x) = \sqrt{2x+6} - 1$. Déterminer D_r .
2. Calculer $r(-3)$, $r(-1)$ et $r(5)$.
3. Déterminer les antécédents de 0 et de 2.
4. Résoudre $r(x) \leq 3$ sur D_r .

Exercice 13 — Fonction homographique

**

1. On pose $s(x) = \frac{1}{x-2} + 3$. Déterminer D_s .
2. Calculer $s(1)$ et $s(3)$.
3. Le nombre 3 possède-t-il un antécédent par s ? Justifier.
4. Résoudre $s(x) > 3$.

Exercice 14 — Tarification par morceaux

**

Une entreprise applique le tarif suivant pour une masse m , en kg :

$$P(m) = \begin{cases} 6 & \text{si } 0 < m \leq 2, \\ 2m + 3 & \text{si } 2 < m \leq 5, \\ 15 & \text{si } 5 < m \leq 10. \end{cases}$$

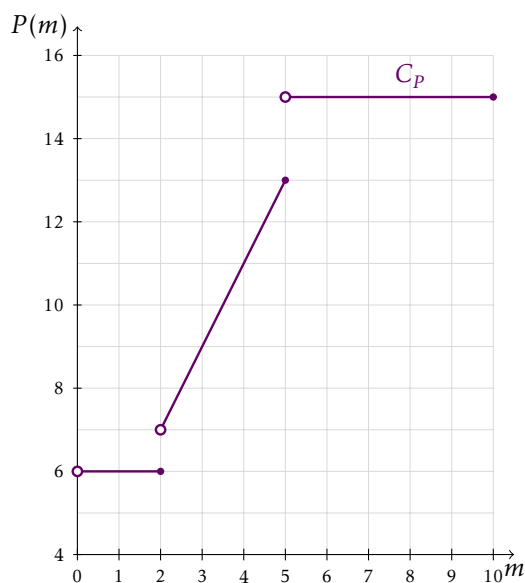


FIGURE 2 : Tarification par morceaux : les points pleins sont inclus, les points creux sont exclus.

1. Donner le domaine de P et expliquer les points ouverts/fermés aux changements de formule.
2. Calculer $P(1,5)$, $P(4)$ et $P(8)$.
3. Déterminer tous les antécédents de 11, puis dire si 7 possède un antécédent.
4. Résoudre $P(m) \leq 11$, puis déterminer exactement l'ensemble des valeurs prises par P .

Exercice 15 — Aire sous contrainte

**

1. Un rectangle a un périmètre égal à 20. Si sa largeur vaut x , sa longueur vaut $10 - x$. Déterminer le domaine géométrique de x .
2. Exprimer l'aire $A(x)$ et calculer $A(2)$ et $A(5)$.
3. Montrer que $A(x) = 25 - (x - 5)^2$, puis en déduire l'aire maximale.
4. Résoudre $A(x) \geq 21$ dans le domaine géométrique.

Exercice 16 — Composition avec racine

1. On pose $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ et $h = g \circ f$. Déterminer l'expression de $h(x)$.
2. Déterminer précisément le domaine D_h .
3. Calculer $h(1)$, $h(3)$, puis déterminer l'antécédent de 4.
4. Résoudre $h(x) \leq 3$ sur D_h .

Exercice 17 — Paramètre vertical d'une parabole

1. Pour un réel m , on définit $f_m(x) = (x-2)^2 + m$. Donner le minimum de f_m et l'abscisse où il est atteint.
2. Selon la valeur de m , déterminer le nombre d'antécédents de 0.
3. Pour $m = -9$, déterminer exactement les antécédents de 0.
4. Pour $m = 1$, résoudre $f_m(x) \leq 5$.

Exercice 18 — Parabole et droite

On considère $f(x) = (x-1)(x-3)$ et $g(x) = x-3$. Le graphique permet de conjecturer les résultats avant la preuve.

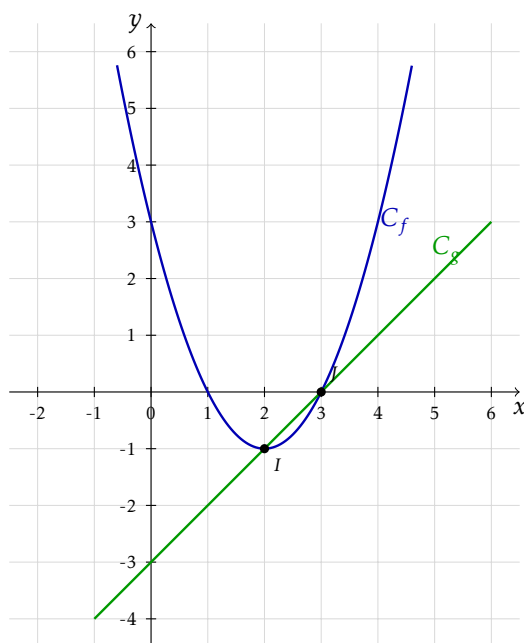


FIGURE 3 : Comparaison graphique de $f(x) = (x-1)(x-3)$ et $g(x) = x-3$.

1. Conjecturer les points d'intersection, puis résoudre exactement $f(x) = g(x)$.
2. Factoriser $f(x) - g(x)$ et résoudre $f(x) \leq g(x)$.
3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$, puis résoudre $f(x) \geq 0$.
4. Résoudre simultanément $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 19 — Variations déduites d'une forme canonique

1. On considère $F(x) = -2(x+1)^2 + 8$. Donner le sens de variation de F de part et d'autre de -1 .
2. Donner le maximum de F et l'abscisse où il est atteint.
3. Déterminer les antécédents de 0.
4. Résoudre $F(x) \geq 0$.

Exercice 20 — Tableau de variations

On considère une fonction f continue sur $[-5; 7]$ et strictement monotone sur chaque branche du tableau.

x	-5	-2	2	7
f	1	-3	4	0

1. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-5; 7]$.
2. Combien l'équation $f(x) = 2$ possède-t-elle de solutions?
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle de solutions?
4. Résoudre $f(x) = 4$ et préciser le nombre de solutions.

Exercice 21 — Rectangle paramétré

1. On considère un rectangle de dimensions $x + 2$ et $10 - x$. Déterminer le domaine géométrique de x .
2. Exprimer son aire $A(x)$ sous forme développée.
3. Montrer que $A(x) = 36 - (x - 4)^2$ et en déduire l'aire maximale.
4. Résoudre $A(x) \geq 27$ dans le domaine géométrique.

Exercice 22 — Trois distances sur une droite

1. On définit $D(x) = |x - 1| + |x - 4| + |x - 7|$. Établir une définition complète de D par morceaux sur $\mathbb{R}$, en distinguant les quatre zones déterminées par 1, 4 et 7.
2. En déduire la valeur minimale de D et l'abscisse où elle est atteinte.
3. Résoudre $D(x) = 8$.
4. Résoudre $D(x) \leq 8$.

Exercice 23 — Distance entre deux mobiles

1. Deux mobiles ont pour positions $p_1(t) = 30t$ et $p_2(t) = 66$ pour $t \geq 0$. Exprimer leur distance $d(t)$.
2. Déterminer l'instant exact de rencontre et la distance minimale.
3. Calculer $d(1)$ et $d(3)$.
4. Déterminer les instants pour lesquels la distance est au plus 6.

Exercice 24 — Famille homographique avec paramètre

1. Pour un réel a , on définit $f_a(x) = \frac{x + a}{x - 2}$. Déterminer le domaine, indépendant de a .
2. Étudier, selon a , l'équation $f_a(x) = 1$.
3. Déterminer a pour que $f_a(0) = 3$.
4. Pour cette valeur de a , déterminer l'antécédent de 0.

Exercice 25 — Translation d'une courbe

x	-3	0	4
f	1	4	-2

1. Une fonction f a le tableau de variations ci-dessous. On définit $g(x) = f(x - 2) + 1$. Déterminer D_g .

2. Calculer $g(2)$.
3. Donner les intervalles de croissance et de décroissance de g .
4. Donner le maximum et le minimum de g , avec les abscisses où ils sont atteints.

Exercice 26 — Parabole et famille de droites

1. On considère la parabole $y = x^2$ et la droite $d_m : y = 2x + m$. Montrer que leurs intersections vérifient $(x - 1)^2 = m + 1$.
2. Selon m , déterminer le nombre de points d'intersection.
3. Déterminer le cas de tangence et le point de tangence.
4. Pour $m = 3$, déterminer les intersections puis résoudre $x^2 \leq 2x + 3$.

Exercice 27 — Valeur absolue et fonction affine

On considère $f(x) = |x - 1|$ et $g(x) = 3 - x$.

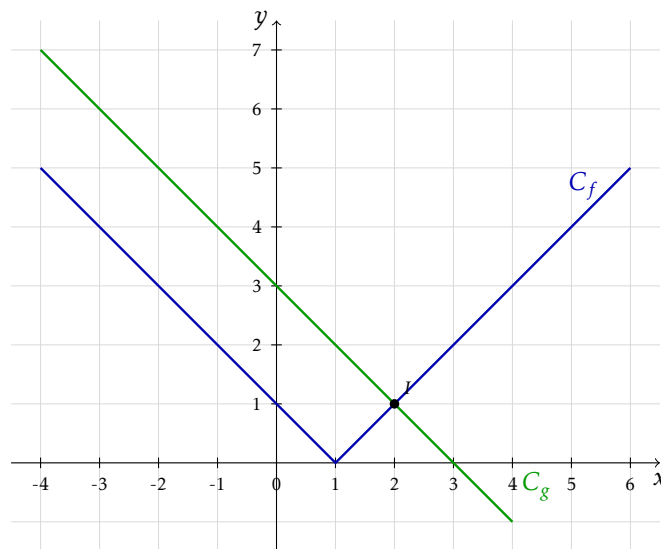


FIGURE 4 : Comparaison de $f(x) = |x - 1|$ et $g(x) = 3 - x$.

1. Lire les zéros des deux fonctions et déterminer exactement leur point d'intersection.
2. Résoudre algébriquement $f(x) \leq g(x)$, puis vérifier le résultat sur le graphique.
3. Résoudre $f(x) \geq g(x)$ et expliquer la complémentarité des deux ensembles solutions.
4. On remplace g par $g_m(x) = m - x$. Selon m , déterminer le nombre de points d'intersection entre C_f et la droite C_{g_m} .

Exercice 28 — Recette discrète

1. Une recette est modélisée par $R(n) = n(30 - 0,1n)$, où n est un nombre entier de produits avec $0 \leq n \leq 200$. Préciser le domaine pertinent.
2. Calculer $R(100)$ et $R(180)$.
3. Montrer que $R(n) = -0,1(n - 150)^2 + 2250$ et déterminer la recette maximale.
4. Déterminer les valeurs entières de n pour lesquelles $R(n) \geq 2000$.

Exercice 29 — Composition avec valeur absolue

1. On pose $f(u) = u^2 - 4$, $g(x) = |x| + 1$ et $h = f \circ g$. Écrire $h(x)$.
2. Calculer $h(0)$ et $h(2)$, puis montrer que $h(-x) = h(x)$.
3. Déterminer les antécédents de 0.
4. Résoudre $h(x) \leq 0$.

On définit $F(x) = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$.

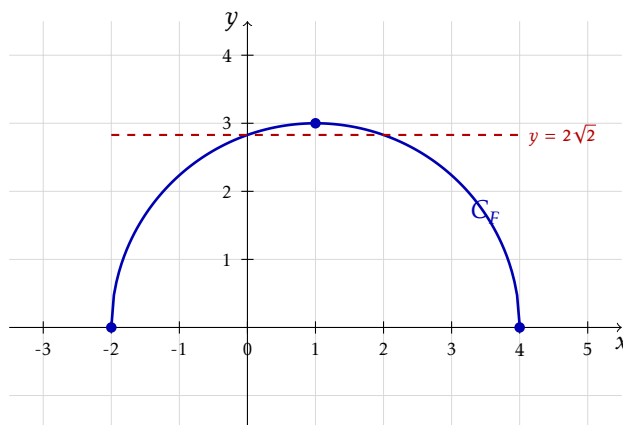


FIGURE 5 : Demi-cercle supérieur associé à $F(x) = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$.

1. Déterminer exactement le domaine D_F , puis le maximum de F et l'abscisse où il est atteint.
2. Déterminer exactement les antécédents de $\sqrt{5}$.
3. Résoudre $F(x) \geq 2\sqrt{2}$ et donner la solution en notation française d'intervalle.
4. Selon le réel k , déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x) = k$.