

Fonctions de référence et fonctions associées – FINAL V14

30 exercices progressifs

A. Fonctions affines

Exercice 1 :

/ 4 pts

On considère la fonction

$$f(x) = 3x - 2.$$

- 1) Construire le tableau de variations de la fonction f .
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants :

a) $x \in [-2; 4]$

c) $x \in]-\infty; 3]$

b) $x \in]1; 5]$

d) $x \in [2; +\infty[$

- 3) Donner un encadrement de x lorsque

$$1 < 3x - 2 < 10.$$

Exercice 2 :

/ 4 pts

On considère la fonction

$$g(x) = -2x + 5.$$

- 1) Construire le tableau de variations de g .
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants :

a) $x \in [-1; 3]$

c) $x \in]-\infty; 1]$

b) $x \in]-4; 2]$

d) $x \in [3; +\infty[$

- 3) Donner un encadrement de x lorsque

$$-3 < -2x + 5 < 9.$$

Exercice 3 :

/ 4 pts

On considère

$$h(x) = \frac{1}{2}x - 4.$$

- 1) Préciser le sens de variation de h .
- 2) Déterminer l'image des intervalles suivants :

a) $[-4; 6]$

c) $] -\infty; 2]$

b) $]0; 8]$

d) $[10; +\infty[$

- 3) Résoudre

$$-3 < \frac{1}{2}x - 4 < 2.$$

Exercice 4 :

/ 5 pts

On considère

$$u(x) = -\frac{3}{2}x + 1.$$

- 1) Construire le tableau de variations de u .
- 2) Déterminer l'image de l'intervalle

$$[-2; 6].$$

- 3) Résoudre les doubles inégalités suivantes :

a)

$$-5 < u(x) < 4$$

b)

$$-2 \leq u(x) \leq 7$$

- 4) Expliquer pourquoi l'ordre des bornes est inversé lorsqu'on divise une inégalité par le coefficient directeur de u .

B. Fonction carrée

Exercice 5 :

/ 4 pts

On considère la fonction carrée

$$f(x) = x^2.$$

- 1) Construire le tableau de variations de f .
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles :

a) $[-3; 2]$

c) $[-6; -2]$

b) $[2; 5]$

d) $[-4; 4]$

Exercice 6 :

/ 4 pts

Pour chacune des situations suivantes, déterminer l'ensemble des valeurs de x .

1)

$$1 < x^2 < 9$$

3)

$$x^2 < 16$$

2)

$$4 \leq x^2 \leq 25$$

4)

$$9 < x^2 \leq 36$$

Exercice 7 :

/ 5 pts

On considère $f(x) = x^2$.

- 1) Déterminer l'image de

$$[-5; -1].$$

- 2) Déterminer l'image de

$$]-2; 6].$$

- 3) Résoudre

$$16 \leq x^2 < 49.$$

- 4) Résoudre

$$x^2 \geq 25.$$

Exercice 8 :

/ 5 pts

Sans utiliser de calculatrice :

- 1) Comparer $(-7)^2$ et $(-5)^2$.
- 2) Comparer $2, 4^2$ et $3, 1^2$.
- 3) Sachant que

$$-5 < x < -2,$$

donner le meilleur encadrement possible de x^2 .

- 4) Sachant que

$$-3 \leq x \leq 4,$$

déterminer l'intervalle auquel appartient x^2 .

C. Fonction inverse

Exercice 9 :

/ 5 pts

On considère la fonction inverse

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Construire son tableau de variations.
- 3) Déterminer les images des intervalles suivants :

a)

$$[2; 8]$$

c)

$$]1; 4]$$

b)

$$[-6; -2]$$

d)

$$]-\infty; -3]$$

Exercice 10 :

/ 4 pts

Donner un encadrement de x dans chacune des situations suivantes :

1)

$$1 < \frac{1}{x} < 3$$

3)

$$-4 < \frac{1}{x} < -2$$

2)

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{7}{6}$$

4)

$$-2 < \frac{1}{x} < 0$$

Exercice 11 :

/ 5 pts

On considère

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Déterminer l'image de chaque intervalle.

1)

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$$

3)

$$x \in]2; +\infty[$$

2)

$$x \in \left[-6; -\frac{1}{2}\right]$$

4)

$$x \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right]$$

Exercice 12 :

/ 5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1)

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$$

3)

$$-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$$

2)

$$2 < \frac{1}{x} < 5$$

4)

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$$

On prendra soin de tenir compte de la valeur interdite $x = 0$.

D. Fonction cube

Exercice 13 :

/ 4 pts

On considère

$$f(x) = x^3.$$

- 1) Construire le tableau de variations de f .
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles :

a) $[-2; 3]$

c) $] -\infty; 2]$

b) $] -4; 1]$

d) $[-3; +\infty[$

Exercice 14 :

/ 4 pts

Donner un encadrement de x lorsque :

1)

$$-8 < x^3 < 27$$

3)

$$-125 < x^3 \leq 8$$

2)

$$1 \leq x^3 \leq 64$$

4)

$$-27 \leq x^3 < 125$$

Exercice 15 :

/ 5 pts

On considère la fonction cube.

- 1) Sans calculatrice, comparer

$$(-4)^3 \quad \text{et} \quad (-3)^3.$$

- 2) Comparer

$$2^3 \quad \text{et} \quad 3^3.$$

- 3) Si

$$-2 < x < 5,$$

encadrer x^3 .

- 4) Si

$$-4 \leq x \leq -1,$$

encadrer x^3 .

Exercice 16 :

/ 5 pts

Résoudre :

1)

$$x^3 < 8$$

3)

$$-64 < x^3 < 1$$

2)

$$x^3 \geq -27$$

4)

$$27 \leq x^3 \leq 216$$

E. Fonction racine carrée

Exercice 17 :

/ 5 pts

On considère

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Construire son tableau de variations.
- 3) Déterminer les images :

a)

$$[0; 9]$$

c)

$$]1; 16]$$

b)

$$[4; 25]$$

d)

$$[36; +\infty[$$

Exercice 18 :

/ 4 pts

Donner un encadrement de x lorsque :

- | | | | |
|----|--------------------------|----|-----------------------|
| 1) | $1 < \sqrt{x} < 3$ | 3) | $0 \leq \sqrt{x} < 4$ |
| 2) | $2 \leq \sqrt{x} \leq 5$ | 4) | $3 < \sqrt{x} \leq 7$ |

Exercice 19 :

/ 5 pts

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$:

- | | | | |
|----|-----------|----|-------------------------------------|
| 1) | $[2; 18]$ | 3) | $\left[\frac{1}{4}; 9\right[$ |
| 2) | $]5; 20]$ | 4) | $\left]\frac{1}{9}; +\infty\right[$ |

Exercice 20 :

/ 5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- | | | | |
|----|-------------------|----|------------------------------------|
| 1) | $\sqrt{x} < 5$ | 3) | $2 < \sqrt{x} < 6$ |
| 2) | $\sqrt{x} \geq 3$ | 4) | $\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} \leq 4$ |

On précisera à chaque fois la condition $x \geq 0$.

F. Inverse d'une fonction affine

Exercice 21 :

/ 6 pts

On considère

$$f(x) = \frac{1}{2x-3}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer la valeur interdite.
- 3) Étudier les variations de f sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.
- 4) Déterminer l'image de

$$[2; 4].$$

- 5) Résoudre

$$1 < \frac{1}{2x-3} < 3.$$

Exercice 22 :

/ 6 pts

On considère

$$g(x) = \frac{1}{x+2}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 2) Construire son tableau de variations.
- 3) Déterminer l'image de

$$[0; 3].$$

- 4) Déterminer l'image de

$$[-5; -3].$$

- 5) Résoudre

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < 1.$$

Exercice 23 :

/ 6 pts

On considère

$$h(x) = \frac{1}{3-2x}.$$

- 1) Déterminer la valeur interdite.
- 2) Donner l'ensemble de définition de h .
- 3) Étudier le sens de variation de h sur chacun des intervalles de son domaine.
- 4) Déterminer l'image de

$$[-1; 1].$$

- 5) Résoudre

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3-2x} < 1.$$

Exercice 24 :

/ 6 pts

On considère

$$u(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de u .
- 2) Construire son tableau de variations.
- 3) Calculer

$$u(0), \quad u(1), \quad u(2).$$

- 4) Déterminer l'image de

$$[1; 4].$$

- 5) Résoudre

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}.$$

Exercice 25 :

/ 6 pts

On considère

$$v(x) = \frac{1}{5-x}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de v .
- 2) Construire son tableau de variations.
- 3) Déterminer l'image de

$$[0; 4].$$

- 4) Déterminer l'image de

$$[6; 10].$$

- 5) Résoudre

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{5-x} < 1.$$

G. Fonctions homographiques**Exercice 26 :**

/ 7 pts

On considère

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que

$$f(x) = 2 + \frac{5}{x-2}.$$

- 3) En déduire les variations de f .
- 4) Construire le tableau de variations.

5) Résoudre

$$3 < f(x) < 7.$$

Exercice 27 :

/ 7 pts

On considère

$$g(x) = \frac{3x - 4}{x + 1}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g .

2) Vérifier que

$$g(x) = 3 - \frac{7}{x + 1}.$$

3) En déduire le sens de variation de g .

4) Déterminer l'image de l'intervalle

$$[0; 3].$$

5) Résoudre

$$-1 < g(x) < 2.$$

Exercice 28 :

/ 7 pts

On considère

$$h(x) = \frac{-2x + 3}{x - 1}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h .

2) Montrer que

$$h(x) = -2 + \frac{1}{x - 1}.$$

3) Construire le tableau de variations de h .

4) Déterminer l'image de

$$[2; 5].$$

5) Résoudre

$$-2 < h(x) < -1.$$

Exercice 29 :

/ 7 pts

On considère

$$u(x) = \frac{x + 4}{x + 1}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de u .

2) Montrer que

$$u(x) = 1 + \frac{3}{x + 1}.$$

3) Construire le tableau de variations de u .

4) Déterminer l'image de

$$[1; 5].$$

5) Résoudre

$$\frac{3}{2} < u(x) < \frac{5}{2}.$$

Exercice 30 :

/ 8 pts

On considère la fonction

$$v(x) = \frac{5x + 2}{x - 4}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de v .

2) Montrer que

$$v(x) = 5 + \frac{22}{x - 4}.$$

- 3) En déduire les variations de v sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.
- 4) Construire son tableau de variations.
- 5) Déterminer l'image de

$$[5; 8].$$

- 6) Résoudre

$$6 < v(x) < 16.$$

- 7) Résoudre

$$v(x) < 5.$$

Fin des 30 exercices